

TIAGO OSÓRIO DA SILVA

**MODELAGEM NUMÉRICA DA  
ESTRATIFICAÇÃO TÉRMICA VERTICAL DE  
RESERVATÓRIOS**

**Curitiba**

**2014**



TIAGO OSÓRIO DA SILVA

# MODELAGEM NUMÉRICA DA ESTRATIFICAÇÃO TÉRMICA VERTICAL DE RESERVATÓRIOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Ambiental, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Felga Gobbi

Curitiba

2014

---

S586m Silva, Tiago Osório da  
Modelagem numérica da estratificação térmica vertical de reservatórios /  
Tiago Osório da Silva. – Curitiba, 2014.  
104 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, 2014.

Orientador: Maurício Felga Gobbi .  
Bibliografia: p. 95-97.

1. Difusividade térmica. 2. Calor – Transmissão. 3. Controle de  
temperatura. I. Universidade Federal do Paraná. II. Gobbi, Maurício Felga. III.  
Título.


CDD: 536.2014


---


**TERMO DE APROVAÇÃO**  
**TIAGO OSÓRIO DA SILVA**

**MODELAGEM NUMÉRICA DA ESTRATIFICAÇÃO**  
**TÉRMICA VERTICAL DE RESERVATÓRIOS**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Maurício Felga Gobbi**  
Orientador - Departamento de Engenharia  
Ambiental, UFPR

  
\_\_\_\_\_  
**Profª. Drª. Akemi Kan**  
Instituto de Tecnologia para o  
Desenvolvimento, LACTEC/CEHPAR

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Ricardo Carvalho de  
Almeida**  
Departamento de Engenharia Ambiental,  
UFPR

Curitiba  
2014

# Resumo

O presente trabalho trata do estudo de estratificação térmica em reservatórios. O ciclo de estratificação térmica é suposto ser influenciado principalmente pelas condições meteorológicas. Assim, os processos de troca de calor que ocorrem na interface ar-água como a radiação solar incidente de onda curta, a radiação atmosférica incidente de onda longa, a radiação emitida pela superfície da água, a perda de energia por evaporação e a perda ou ganho de energia por calor sensível são considerados os principais processos que alteram o regime térmico do reservatório. As fontes de calor laterais e o fluxo de calor no fundo são consideradas desprezíveis. O conceito de temperatura de equilíbrio e de coeficiente de troca de calor são utilizados para estimar o fluxo de energia total que ocorre na interface ar-água. Para resolver a distribuição de temperatura ao longo da coluna d'água, um modelo matemático é desenvolvido no qual utiliza-se a equação da transferência de calor unidimensional. A equação da transferência de calor é resolvida numericamente pelo Método de Diferenças Finitas, esquema de Cranck-Nicolson. O coeficiente de difusão turbulenta é parametrizado em relação à velocidade do vento e gradientes estáveis ou neutros de temperatura na coluna d'água. Após alguns estudos de casos simplificados do modelo proposto (Caso 1 a 3), o modelo é aplicado para descrever o ciclo de estratificação térmica do Reservatório do Rio Verde localizado na região metropolitana de Curitiba-PR, Brasil, entre junho de 2009 e dezembro de 2010 (Caso 4 e 5). Caso 4: Entre o ano de 2009 e 2010, os resultados de temperatura de equilíbrio estimados apresentaram os maiores valores no período de estudo e proporcionaram situações de forte estratificação do reservatório. De abril a setembro de 2010, os perfis de temperatura medidos mostraram um reservatório praticamente isotermal e os resultados obtidos pelo modelo apresentaram boa concordância nesse período. A partir de setembro de 2010, os perfis de temperatura medidos mostram uma situação de forte estratificação, porém, o modelo não foi capaz de reproduzir tal situação devido aos baixos valores de temperatura de equilíbrio estimados. A defasagem entre a temperatura de equilíbrio e a temperatura da superfície da água apenas foi possível assumindo um coeficiente de troca de calor constante. Caso 5: Utilizando um coeficiente de troca de calor estimado a partir de uma expressão analítica, os resultados mostraram que a temperatura da superfície da água e a temperatura de equilíbrio estavam em fase e apresentou valores próximos. O Caso 5 apresentou melhor concordância com os dados comparado ao Caso 4. Embora, em algumas situações o modelo não tenha reproduzido a forte estratificação observada, a proposta que o regime térmico do Reservatório do Rio Verde é influenciado pelas condições meteorológicas mostrou-se bastante satisfatória.

**Palavras-chaves:** Estratificação térmica de corpos d'água. Equação da transferência de calor unidimensional. Temperatura de equilíbrio.

# Abstract

The present work refers to the study of thermal stratification in reservoirs. The cycle of thermal stratification is supposed to be mainly influenced by the meteorological conditions, including solar radiation, air temperature, relative humidity and wind speed which are the external forcing that alter the thermal regime of the reservoir. Thus, the processes of heat exchange that occur at the air-water interface as the short-wave solar radiation, the long-wave atmospheric radiation, the long-wave radiation emitted from the water surface, the energy loss by evaporation and the loss or gain energy by heat conduction are considered the main processes that alter the thermal regime. The sources of lateral heat and the heat flux at the bottom are considered negligible. The concept of equilibrium temperature and heat transfer coefficient are used to estimate the total energy budget that occurs at the air-water interface. To resolve the temperature distribution throughout the water column, a mathematical model is developed in which the equation of one-dimensional heat transfer was used. The equation of heat transfer is numerically solved by the Method of Finite Differences, Crank-Nicolson scheme. The coefficient of turbulent diffusion is parameterized in relation to the wind speed and stable temperature gradients in the water column. After some studies of simplified cases of the proposed model (Case 1 to 3), the model is applied to describe the cycle of thermal stratification of Rio Verde Reservoir located in the metropolitan region of Curitiba-PR, Brazil, between June 2009 and December 2010 (Case 4 and 5). Case 4: Between 2009 and 2010, the results of the estimated equilibrium temperature showed the highest values during the study period and provided situations of strong stratification of the reservoir. From April to September 2010, the measured temperature profiles showed a nearly isothermal reservoir and the results obtained by the model showed good conformity in this period. From September 2010, the temperature profiles measured showed a situation of strong stratification, however, the model was not able to reproduce such situation due to the low temperature values of estimated equilibrium temperature. The lag between the equilibrium temperature and the surface temperature of the water was only possible taking a constant coefficient of heat exchange. Case 5: Using a coefficient of heat exchange estimated from an analytical expression, the results showed that the surface temperature of the water and the equilibrium temperature were in phase and showed similar values. The Case 5 showed better agreement with the data compared to Case 4. Although in some situation the model has not reproduced the strong stratification observed, the proposal that the thermal regime of the Rio Verde Reservoir is influenced by the meteorological conditions proved to be quite satisfactory.

**Key-words:** Thermal stratification of water bodies. Equation of one-dimensional heat transfer. Equilibrium temperature.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferentes formulações para a estimativa da radiação de onda longa emitida pela atmosfera para céu claro. . . . .	35
Figura 2 – Estimativa do coeficiente de troca de calor obtido pela solução analítica.	42
Figura 3 – Perfis de temperatura medidos em 2010. . . . .	56
Figura 4 – Perfis de temperatura simulados considerando diferentes valores para $\beta$ – Caso 1. . . . .	61
Figura 5 – Perfis de temperatura simulados considerando diferentes valores para $\beta$ – Caso 2. . . . .	67
Figura 6 – Perfis do coeficiente de difusão turbulenta, $\beta = 1$ – Caso 2. . . . .	68
Figura 7 – Perfis de temperatura simulados – Caso 3. . . . .	74
Figura 8 – Perfis de coeficiente de difusão turbulenta – Caso 3. . . . .	75
Figura 9 – Ciclo de estratificação simulado para o corpo d’água – Caso 3. . . . .	76
Figura 10 – Perfis de temperatura simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010.	82
Figura 11 – Perfis do coeficiente de difusão turbulenta simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010. . . . .	83
Figura 12 – Perfis de temperatura medidos e simulados. . . . .	84
Figura 13 – Perfis de temperatura medidos e simulados (continuação). . . . .	85
Figura 14 – Ciclo de estratificação estimado para o Reservatório do Rio Verde. . . . .	86
Figura 15 – Perfis de temperatura simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010 – $K = f(T_s, U)$ . . . . .	88
Figura 16 – Perfis de temperatura medidos e simulados – $K = f(T_s, U)$ . . . . .	89
Figura 17 – Perfis de temperatura medidos e simulados (continuação) – $K = f(T_s, U)$ .	90
Figura 18 – Ciclo de estratificação estimado para o Reservatório do Rio Verde – $K = f(T_s, U)$ . . . . .	91
Figura 19 – O coeficiente de troca de calor variando – $K = f(T_s, U)$ . . . . .	91
Figura 20 – Temperatura da água medida a 2 metros de profundidade ( $T_1$ ) e Temperatura de equilíbrio ( $T_e$ ) plotada em relação ao tempo – $K = f(T_s, U)$ .	92
Figura 21 – Perfis de temperatura. . . . .	102
Figura 22 – Temperatura de equilíbrio e superficial ao longo do tempo. . . . .	103
Figura 23 – Conservação da energia ao longo do tempo. . . . .	104



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores utilizados de $\sigma_1$ e $p$ em estudos anteriores. . . . .	31
Tabela 2 – Algumas formas de $K_{H_0}$ . . . . .	31
Tabela 3 – Valores das constantes empíricas $a$ , $b$ e $\gamma$ . . . . .	34
Tabela 4 – As constantes $C_1$ , $C_2$ e $C_3$ como uma função da altura $h$ acima da superfície. Adaptado de Sweers (1976). . . . .	37
Tabela 5 – Dados Gerais do Reservatório do Rio Verde. Adaptado de Cunha (2011, p. 50). . . . .	53
Tabela 6 – Valores médios, mínimos e máximos mensais da radiação solar e da temperatura do ar (2010). . . . .	54
Tabela 7 – Valores médios, mínimos e máximos mensais da umidade relativa e da velocidade do vento (2010). . . . .	55
Tabela 8 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 1. . . . .	60
Tabela 9 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 2. . . . .	65
Tabela 10 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 3. . . . .	73
Tabela 11 – Dados Meteorológicos - Média Mensal. . . . .	80
Tabela 12 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 4. . . . .	81
Tabela 13 – Parâmetros utilizados para o teste de conservação de energia. . . . .	102



# Lista de abreviaturas e siglas

EDP	Equação Diferencial Parcial
MDF	Método de Diferenças Finitas
ME	Métodos Espectrais
MEF	Método de Elementos Finitos
MVF	Método de Volumes Finitos
OD	Oxigênio Dissolvido
RMC	Região Metropolitana de Curitiba
SANEPAR	Companhia de Saneamento do Paraná



# Lista de símbolos

$A$	Área da seção transversal constante ( $\text{m}^2$ )
$A(z)$	Área da seção transversal em função da profundidade ( $\text{m}^2$ )
$A_1$	Área superficial onde se deseja ajustar $f(U)$ ( $\text{m}^2$ )
$A_2$	Área superficial onde foi obtida $f(U)$ ( $\text{m}^2$ )
$a$	Constante empírica (adimensional)
$B$	Constante de Bowen ( $\text{Pa}^\circ\text{C}^{-1}$ )
$b$	Constante empírica (adimensional)
$C_D$	Coefficiente de arrasto (adimensional)
$C_1, C_2$ e $C_3$	Constantes empíricas
$C_4$	Cobertura de nuvens (%)
$c$	Calor específico da água ( $\text{Jkg}^{-1}\text{C}^{-1}$ )
$c_{par}$	Calor específico do ar ( $\text{calg}^{-1}\text{C}^{-1}$ )
$c_1, c_2, c_3, c_4$	Constantes empíricas
$D_v$	Difusividade térmica ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$d$	Profundidade do disco de Secchi (m)
$E$	Energia total do corpo d'água (J)
$e$	Constante empírica (adimensional)
$e(T)$	Pressão de saturação de vapor (Pa)
$e_a$	Pressão de saturação de vapor à temperatura do ar (Pa)
$e_d$	Pressão de saturação de vapor à temperatura do ponto de orvalho (Pa)
$e_s$	Pressão de saturação de vapor à temperatura da superfície da água (Pa)
$f_p$	Fator de ponderação
$f(R_i)$	Função de estabilidade (adimensional)

$f(S)$	Função com um apropriado parâmetro de estabilidade que caracteriza a estratificação (adimensional)
$f(U)$	Função da velocidade do vento ( $\text{Wm}^{-2}\text{mbar}^{-1}$ )
$f_1(U)$ e $f_2(U)$	Função da velocidade do vento 1 e 2 ( $\text{Wm}^{-2}\text{mbar}^{-1}$ )
$f(U_{10})$	Função da velocidade do vento para uma altura 10 metros ( $\text{Wm}^{-2}\text{mbar}^{-1}$ )
$g$	aceleração da gravidade ( $\text{ms}^{-2}$ )
$H$	Profundidade do Corpo d'água (m)
$H_a$	Radiação de onda longa emitida pela atmosfera e absorvida pelo corpo d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_b$	Radiação de onda longa emitida a partir da superfície d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_c$	Termo de troca de calor não radiativa relacionado à condução de calor superficial do corpo d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_e$	Termo de troca de calor não radiativo relacionado à evaporação superficial do corpo d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_n$	balanço total de fluxos através da superfície d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_s$	Radiação de onda curta absorvida pelo corpo d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$H_s(z)$	Radiação de onda curta que penetra no corpo d'água ( $\text{Wm}^{-2}$ )
$h$	Altura acima da superfície da água onde é medido a velocidade do vento (m)
$K$	Coefficiente de troca de calor na interface ar-água ( $\text{Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$ )
$K_H$	Coefficiente de difusão turbulenta para o calor ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$K_{H_{\text{esp}}}$	Coefficiente de difusão turbulenta mínimo especificado ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$K_{H_{\text{min}}}$	Coefficiente de difusão turbulenta mínimo ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$K_M$	Coefficiente de difusão molecular para o calor ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$K_{H_0}$	Coefficiente de difusão turbulenta para o estado neutro ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$k$	Constante de von Kármán (adimensional)
$k_1$	dependente do tipo de nuvens
$L$	Calor latente de vaporização ( $\text{calg}^{-1}$ )



$P$	Pressão atmosférica (mmHg)
$p$	Constante empírica
$R_B$	Relação de Bowen (adimensional)
$R_h$	Umidade Relativa (%)
$R_i$	Número de Richardson (adimensional)
$R_{1,2}$	Relação de áreas (adimensional)
$T = T(z,t)$	Temperatura do corpo d'água em relação à profundidade e ao tempo (°C)
$T_a$	Temperatura do ar (°C)
$T_d$	Temperatura do ponto de orvalho (°C)
$T_e$	Temperatura de equilíbrio (°C)
$\bar{T}_e$	Valor médio da temperatura de equilíbrio ao longo de um ciclo anual (°C)
$\delta T_e$	Amplitude média da variação anual da temperatura de equilíbrio (°C)
$T_s$	Temperatura da superfície da água (°C)
$U_h$	Velocidade do vento medida à uma altura fixa ( $\text{ms}^{-1}$ )
$u$	Componente horizontal da velocidade da água ( $\text{ms}^{-1}$ )
$u_*$	Velocidade de atrito ( $\text{ms}^{-1}$ )
$z_{cr}$	profundidade crítica (m)
$w$	Componente vertical da velocidade da água ( $\text{ms}^{-1}$ )
$\alpha$	Fase de defasagem (radianos)
$\alpha_w$	Albedo da água (adimensional)
$\alpha_v$	Coefficiente de expansão térmica da água ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
$\beta$	Proporção de absorção de radiação solar de onda curta na superfície da água (adimensional)
$\beta_1$	Taxa de decaimento da temperatura ( $\text{m}^{-1}$ )
$\gamma$	Constante empírica (adimensional)

$\varepsilon_a$	Emissividade de calor da atmosfera (adimensional)
$\varepsilon_W$	Emissividade de calor da água (adimensional)
$\eta$	Coefficiente de absorção ou extinção ( $\text{m}^{-1}$ )
$\rho_{ar}$	Densidade do ar ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\rho$ e $\rho_W$	Densidade da água ( $\text{kgm}^{-3}$ )
$\sigma$	Constante de Stephan-Boltzman ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ )
$\sigma_1$	Constante empírica (adimensional)
$\tau_s$	Tensão de atrito superficial (Pa)
$\omega$	Frequência anual ou sazonal ( $\text{dia}^{-1}$ )

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>21</b>
2.1	REGIME TÉRMICO DE CORPOS D'ÁGUA	21
2.2	ESTRATIFICAÇÃO TÉRMICA	22
2.3	BALANÇO DE ENERGIA	25
<b>3</b>	<b>O MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>27</b>
3.1	A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE	27
3.1.1	O COEFICIENTE DE DIFUSÃO TURBULENTA PARA O CALOR	29
3.2	BALANÇO DE ENERGIA EM CORPOS D'ÁGUA	31
3.3	A TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO E O COEFICIENTE DE TROCA DE CALOR	39
<b>4</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS</b>	<b>43</b>
4.1	MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	43
4.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR	44
4.3	CORREÇÃO DO PERFIL DE TEMPERATURA INSTÁVEL	52
4.4	DESCRIÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO	53
4.5	SÉRIE DE DADOS METEOROLÓGICOS	54
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>57</b>
5.1	SIMULAÇÃO: CASO 1	57
5.1.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 1	62
5.2	SIMULAÇÃO: CASO 2	62
5.2.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 2	69
5.3	SIMULAÇÃO: CASO 3	70
5.3.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 3	76
5.4	SIMULAÇÃO CASO 4	77
5.4.1	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 4	86
5.5	SIMULAÇÃO CASO 5	87
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES GERAIS</b>	<b>93</b>
	<b>Referências</b>	<b>95</b>

<b>Apêndices</b>	<b>99</b>
<b>APÊNDICE A TESTE DE CORREÇÃO DE PERFIS DE TEMPERATURA INSTÁVEIS . . . . .</b>	<b>101</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os estudos de corpos d'água em geral são bastante vastos e complexos, e normalmente envolvem seus aspectos físicos (temperatura, turbidez e sedimentos), químicos (Oxigênio Dissolvido (OD), salinidade, pH, alcalinidade, fosfatos e nitratos), biológicos (fitoplâncton, zooplâncton e peixes), hidrodinâmicos (descarga e tempo de detenção) e geomorfológicos (cobertura vegetal, mata ciliar e evolução da paisagem). Ressaltando que todos estes aspectos estão relacionados entre si de alguma forma.

Em relação à qualidade da água, a temperatura é um importante parâmetro que controla os processos físicos, químicos e biológicos. A forte dependência desses processos com a temperatura da água é o principal motivo que leva a necessidade de desenvolvimento de modelos de *estratificação térmica*, especialmente, modelos de estratificação térmica vertical. Para o desenvolvimento do modelo, é preciso especificar todos os mecanismos de troca de calor importantes no corpo d'água.

Os mecanismos de troca de calor de um corpo d'água podem acontecer na interface ar-água, fontes de calor laterais de entrada e saída e nas trocas de calor no fundo. Porém, supõe-se que o regime térmico é alterado principalmente pelas condições meteorológicas (EDINGER; DUTTIWELLER; GEYER, 1968; HANEY, 1971).

A temperatura da água em oceanos, lagos e reservatórios é um dos principais parâmetros que controlam a qualidade d'água. O oxigênio dissolvido, o ciclo de nutrientes, a produtividade biológica e a pesca podem ser severamente afetados por mudanças na temperatura da água (RILEY; STEFAN, 1988; ANTONOPOULOS; GIANNIOU, 2003). Os efeitos de descarte de águas residuárias de termoelétricas também podem influenciar na estrutura térmica (SUNDARAM; REHM, 1971a; MOORE; JALURIA, 1972). Impactos de mudanças climáticas também podem influenciar o balanço de energia e os perfis de temperatura (HONDZO; STEFAN, 1991).

A transferência de calor na vertical pode ser considerada através de dois tipos de modelos: (1) *o modelo de balanço de energia integrado: modelo slab*; (2) *o modelo de difusão turbulenta*. O modelo de balanço de energia integrado supõe que o corpo d'água pode ser dividido em camadas bem definidas e homogêneas, como o *epilímnio* e o *hipolímnio*, separados por uma interface de elevado gradiente de temperatura. O modelo de difusão turbulenta a princípio não supõe homogeneidade da coluna d'água. A *equação da transferência de calor unidimensional* é utilizada para estimar os perfis de temperatura (HENDERSON-SELLERS, 1984b; ALDAMA; HARLEMAN; ADAMS, 1989).

O objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento e aplicação de um modelo matemático de estratificação térmica para corpos d'água. A equação da conservação da

energia ou a equação da transferência de calor unidimensional transiente na vertical é utilizada para estimar os perfis de temperatura. O objetivo específico é a aplicação do modelo de evolução térmica no Reservatório do Rio Verde.

As análises dos resultados estão divididas em cinco (5) casos.

Caso 1: É estudado como a radiação solar é absorvida pelo corpo d'água em uma situação de aquecimento e sua implicação nos resultados de perfis de temperatura obtidos. O coeficiente de difusão é assumido constante.

Caso 2: É utilizado uma parametrização para o coeficiente de difusão turbulenta como função da velocidade do vento e de gradientes de temperatura estáveis ou neutros da água. Esta parametrização é válida apenas em situações de aquecimento. Visando já à aplicação do modelo no Reservatório do Rio Verde - PR, a área como função da profundidade é implementada na solução numérica.

Caso 3: É apresentado o conceito de temperatura de equilíbrio e do coeficiente de troca de calor. A temperatura de equilíbrio é suposta variar sazonalmente definida por uma função senoidal. O aquecimento do corpo d'água ocorre quando a temperatura de equilíbrio é maior que a temperatura da superfície da água, sendo o coeficiente de difusão turbulenta válido para essa situação. O resfriamento é caracterizado quando a temperatura de equilíbrio é menor que a temperatura da superfície da água. Neste caso, situações instáveis do perfis de temperatura surgem e é suposto que esta situação não perdura no tempo. Portanto, o perfil de temperatura é corrigido imediatamente. A geometria do Reservatório do Rio Verde é usada na solução numérica.

Caso 4: O modelo de estratificação térmica é aplicado no Reservatório do Rio Verde utilizando os dados meteorológicos do lago. É suposto que o principal fator que altera o regime térmico do reservatório são as trocas de calor que ocorrem na interface ar-água. As trocas de calor supostas na superfície da água são: a radiação solar incidente, a radiação atmosférica incidente, a radiação emitida pela superfície da água, a perda de energia por evaporação e a perda ou ganho de energia por calor sensível. As fontes de calor laterais e os fluxos de calor no fundo são desprezados. O conceito de temperatura de equilíbrio e do coeficiente de troca de calor são usados. O coeficiente de troca de calor é usado constante.

Caso 5: Uma função analítica para o coeficiente de troca de calor derivada neste trabalho é aplicada no Reservatório do Rio Verde. O coeficiente de troca de calor é estimado a partir da temperatura da superfície da água e da velocidade do vento.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

A seção 2.1 apresenta uma breve descrição qualitativa do regime térmico observado em corpos d'água de clima temperado e tropical. O ciclo de estratificação anual e a formação de camadas heterogêneas no corpo hídrico são descritos para melhor compreensão do fenômeno a ser modelado.

Estudos realizados sobre a modelagem da estrutura térmica em corpos d'água são revisados na seção 2.2. A modelagem é caracterizada pelo estudo de distribuição de temperatura vertical.

Na seção 2.3, trabalhos realizados sobre balanço de energia em corpos d'água são estudados. Os fluxos de calor são supostos ocorrer na interface ar-água, fontes de calor laterais e fluxo de calor no fundo.

### 2.1 REGIME TÉRMICO DE CORPOS D'ÁGUA

O regime térmico de corpos d'água é influenciado pelos fluxos de calor na interface ar-água e fontes de calor de entrada e saída de água (HENDERSON-SELLERS, 1986). Como objeto de estudo, considere lagos e reservatórios de clima temperado e tropical.

Lagos e reservatórios de clima temperado, no final do inverno, apresentam baixas temperaturas ao longo da coluna d'água (em torno de 4°C). Com o início do período de aquecimento devido a um maior fluxo de energia (radiação solar) que chega na sua superfície, uma distribuição de temperatura na vertical começa a ser observada. Uma camada superior com temperaturas mais elevadas e relativamente bem misturada (praticamente isotérmica) é desenvolvida (*epilímnio*). Uma camada mais profunda com temperaturas mais baixas e praticamente uniforme (isotérmica) é também formada e denominada *hipolímnio*. Entre essas duas camadas, existe uma região chamada de *metalímnio* que apresenta um elevado gradiente de temperatura. A *termoclina* ocorre dentro do metalímnio e é caracterizada por apresentar um gradiente de temperatura máximo. Nessas condições, o corpo hídrico se encontra estratificado estavelmente e a estratificação térmica persiste por vários meses durante o período de aquecimento (primavera e verão). Nas estações de outono e inverno, o fluxo de energia total na superfície muda de sentido e o corpo hídrico começa a perder energia, conseqüentemente esfriando. Principalmente, a camada superior perde energia por radiação de onda longa, evaporação ou calor latente e calor sensível. Esse processo de resfriamento continua até uma completa homogeneização do corpo hídrico (HUTCHINSON, 1957, p. 427–428);(HENDERSON-SELLERS, 1984b, p. 22–23).

De acordo com Esteves (1998, p. 139), em clima tropical, o processo de estrati-

ficção ocorre de forma diferente de lagos de clima temperado. É comum a ocorrência de estratificação e desestratificação diária. Corpos d'água de climas tropicais apresentam baixos gradientes de temperatura. A estratificação ocorre normalmente durante o dia e a desestratificação durante o período da noite.

## 2.2 ESTRATIFICAÇÃO TÉRMICA

Dake e Harleman (1969) realizaram experimentos em laboratório para compreender melhor como funciona o processo de estratificação em lagos. Basicamente, o experimento consistia em um tanque de água que recebia energia através da superfície por meio de uma fonte externa (lâmpadas). A energia era controlada rigorosamente de tal forma que sua função em relação ao tempo era conhecida. No primeiro experimento, o fornecimento de energia foi constante ao longo do tempo. No segundo experimento, o fornecimento de energia era uma função do tempo e variava de forma parabólica. Da equação da conservação da energia unidimensional mais as condições iniciais e de contorno foram obtidas soluções analíticas. As expressões analíticas foram validadas com os dados obtidos em laboratórios e apresentaram boa concordância no aquecimento.

No trabalho apresentado por Sundaram e Rehm (1971b), o mecanismo que conduz à formação e manutenção da estrutura térmica de lagos temperado foi analisado. Segundo os autores, o ganho ou a perda de energia ocorre na superfície do lago e existe uma relação notável da turbulência com o gradiente de temperatura. Trata-se de um estudo *qualitativo e analítico* onde a equação da conservação da energia unidimensional foi estudada. Foi proposto um coeficiente de difusão turbulenta como função da velocidade do vento do ar e do gradiente de temperatura estável.

Sundaram e Rehm (1971a) descreveram um estudo teórico sobre os efeitos de descarte de águas residuárias de termoeletricas em lagos temperados para um ciclo anual. A equação da conservação da energia unidimensional na vertical foi utilizada para a avaliação. Normalmente, descartes térmicos bem como descartes de esgotos são feitos no hipolímnio. O motivo pelo qual isso é feito, é que deseja-se que ambos os poluentes sejam mantidos no hipolímnio, evitando assim contaminações de áreas costeiras. Os resultados mostraram que a descarga termal aumentou o valor médio de temperatura da água durante o inverno (situação isotérmica), a temperatura média do epilímnio e os perfis de temperatura durante o ciclo anual.

Os efeitos térmicos de uma termoeletrica instalada no lago Cayuga (Estado de Nova Iorque) foram estudados por Moore e Jaluria (1972). Utilizou-se um modelo de transferência de calor para o estudo, onde foram impostas perturbações no fluxo de calor na superfície do lago e também modificações na difusão turbulenta ao longo da profundidade supostamente causadas pelo impacto da termoeletrica no lago. A resposta ambiental de



tal impacto pode ser o aumento da temperatura média anual da superfície do lago. Para avaliar o impacto biológico, mencionaram os autores, deve-se conhecer os efeitos da adição de calor em toda a profundidade do lago e em todo o ciclo anual. O efeito dessa atividade pode alterar os perfis de temperatura por redistribuição de energia térmica, e pode afetar a circulação de nutrientes e oxigênio dissolvido no lago. Eles concluíram que um importante impacto biológico está relacionado à concentração de oxigênio dissolvido que poderia ser diminuída por aumento de temperatura e estendido tempo de estratificação. Porém, tais relações entre concentrações de oxigênio dissolvido com perfis de temperatura não foram aprofundadas nesse trabalho.

Sundaram e Rehm (1973) estudaram a estrutura térmica na vertical de lagos de clima temperado e profundos. A equação que descreve a transferência de calor foi resolvida numericamente pelo MDF. A condição de contorno na superfície do lago foi formulada em termos da temperatura de equilíbrio. Os perfis de temperatura e profundidade da termoclina simulados foram validados para o lago Cayuga, mostrando boa concordância.

Um modelo para estimar a variação da temperatura na vertical de grandes corpos d'água foi proposto por Rahman e Marcotte (1974). A coluna d'água foi dividida em duas camadas. A primeira camada é considerada isotermal na qual a mistura causada pelo vento é importante (camada superficial). A segunda camada é onde ocorre o processo de difusão do calor (camada mais profunda). Na primeira camada, os processos que influenciam na temperatura superficial são das condições atmosféricas. Na camada do fundo, a equação da conservação da energia é utilizada para o mecanismo de difusão do calor.

Um modelo numérico foi elaborado para estimar o ciclo anual de temperatura no mar Celta por James (1977). O mar Celta encontra-se entre as longitudes 3° W e 9° W e latitudes 50° N e 54° N. A estrutura térmica vertical foi estudada. O modelo utilizou dados de corrente de maré e variáveis meteorológicas como velocidade do vento, temperatura do ponto de orvalho e radiação solar. A diferença para modelos de estratificação térmica em lagos, por exemplo, é que uma fração da energia fornecida pela corrente de maré fica disponível para aumentar o mecanismo de mistura ao longo da coluna d'água devido ao atrito causado no fundo do mar. A condição de contorno na superfície do mar Celta foi relacionada ao balanço de energia que ocorre na interface ar-água, que por sua vez foi relacionado ao conceito de temperatura de equilíbrio. Para o fundo do mar, supôs-se um fluxo de calor igual a zero. O MDF foi utilizado para obter a solução numérica do problema.

Perfis de temperatura foram estimados para o lago Washington por Walters, Carey e Winter (1978). A equação de transferência de calor unidimensional foi usada para prever os perfis de temperatura durante um ciclo anual. O Método de Elementos Finitos (MEF) foi utilizado para a obtenção da solução numérica e para a não-linearidade do coeficiente de difusão turbulenta foi usado o esquema preditor-corretor de Galerkin. Os autores

propuseram uma nova formulação para o coeficiente de difusão turbulenta, onde o mesmo foi descrito de forma diferente para o epilímnio, para o metalímnio e para o hipolímnio. Outra solução numérica também foi desenvolvida, empregando o MDF, para comparação com o MEF e os resultados apresentaram pequenas diferenças. No período de aquecimento, o modelo apresentou boa conformidade com os dados de temperatura do lago mas para o período de resfriamento a conformidade tornou-se mais fraca.

No trabalho realizado por [McCormick e Scavia \(1981\)](#), o fenômeno físico de transferência de calor na vertical foi investigado nos lagos Ontario e Washington. O coeficiente de difusão foi expresso em termos de um coeficiente de difusão turbulenta em estabilidade neutra e corrigido por um parâmetro de estabilidade, geralmente expresso em função do número de Richardson. A temperatura da superfície da água foi especificada e o fluxo de calor no fundo foi considerado desprezível. Os resultados foram obtidos pelo MDF e apresentaram boa concordância com os valores de perfis de temperatura medidos.

[Caprariis \(1981\)](#) apresentou uma solução analítica para a equação de transferência de calor unidimensional que governa o transporte de calor vertical em lagos. A motivação foi a solução numérica realizada por [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#) e [Sundaram e Rehm \(1973\)](#) que exhibe qualidades observadas em lagos, como: o perfil de temperatura apresenta um ponto de inflexão, o gradiente de temperatura atinge um valor máximo no ponto de inflexão e a profundidade na qual essas características ocorrem muda com o tempo. A expressão para o coeficiente de difusão turbulenta foi apresentada em umas de suas formas mais simples para obtenção da solução analítica e apenas pode ser válida quando a turbulência induzida pelo vento é o mecanismo dominante na mistura. Situações de instabilidade não são consideradas, portanto, a solução analítica não pode ser usada nessas condições.

[Henderson-Sellers \(1984a\)](#) estudou uma nova formulação para o coeficiente de difusão turbulenta para o caso neutro, ou seja, na ausência de estratificação térmica. A nova formulação foi usada em simulação de evolução térmica de lagos e reservatórios em diferentes latitudes e fornece uma boa relação com observações sem requerer calibração entre diferentes locais (menciona o autor).

Um estudo sobre a estrutura térmica de um lago fracamente estratificado na Venezuela (lago Valencia) foi realizado por [Aldama, Harleman e Adams \(1989\)](#). Medições meteorológicas e perfis de temperatura do lago foram feitas em 1977 e 1978. A máxima diferença de temperatura observada entre o epilímnio e o hipolímnio foi de 2°C em agosto de 1977. O *modelo de balanço de energia integrado* foi utilizado para reproduzir os perfis de temperatura desse período. Para o lago Valencia, os autores concluíram que a turbulência no hipolímnio exibe um importante papel no controle da transferência de calor ao longo da coluna d'água.

Três estudos de caso de lagos temperados foram realizados em resposta a um clima

mais quente (HONDZO; STEFAN, 1991). Em particular, um ano mais quente (1988) foi comparado com um ano normal (1971) de acordo com os autores. Os lagos encontram-se ao norte dos Estados Unidos e o período de estudo foi de 1 de abril a 31 de outubro. A temperatura da água no epilímnio, os perfis de temperatura e a perda de água por evaporação são as características consideradas mais relevantes. A equação da transferência de calor foi usada para estimar os perfis de temperatura. Na condição de contorno na superfície, utilizou-se o conceito de temperatura de equilíbrio. Relacionando o ano de 1988 com o ano de 1971, os resultados mostraram que a temperatura da água no epilímnio foi mais elevada, a perda de água por evaporação aumentou e a estratificação ocorreu mais cedo.

No trabalho realizado por Antonopoulos e Gianniou (2003), a distribuição da temperatura na vertical para o lago Vegoritis, na Grécia, foi estimada e sua implicação na distribuição do oxigênio dissolvido foi estudada. Estes dois parâmetros de qualidade da água foram estimados por modelos numéricos. O estudo mostrou que em lagos estratificados a termoclina tornou-se uma barreira para a transferência de oxigênio do epilímnio para o hipolímnio. Logo, a disponibilidade de oxigênio ficou confinada ao epilímnio. Por outro lado, houve uma diminuição do oxigênio dissolvido no hipolímnio motivado pela respiração de organismos. Estas características mostraram-se ser muito dependentes do ciclo de estratificação para o lago.

## 2.3 BALANÇO DE ENERGIA

Harbeck (1962) sugeriu que a evaporação de reservatórios pode ser estimada a partir do conhecimento do nível d'água, da velocidade do vento, da umidade do ar e da temperatura da superfície d'água. A *teoria de transferência de massa* foi utilizada para estimar a evaporação de vários reservatórios. Ela relaciona a diferença de vapor d'água entre a superfície d'água e a atmosfera multiplicada pela velocidade do vento.

De acordo com Edinger, Duttweiler e Geyer (1968), as trocas de calor através da interface ar-água são os fatores mais importantes que governam a temperatura da água. A taxa líquida de troca de calor pode ser avaliada em termos de um coeficiente de troca de calor e uma temperatura de equilíbrio, sendo ambos dependentes de variáveis meteorológicas. Edinger, Duttweiler e Geyer (1968) apresentaram um desenvolvimento matemático (linearização) e realizaram uma interpretação física para o coeficiente de troca de calor e a temperatura de equilíbrio na interface ar-água, tentando justificar e fundamentar a aplicação desse método em modelos de balanço de energia em corpos d'água. O método permite estimar a temperatura da superfície da água e a taxa líquida de troca de calor. Porém, nenhuma aplicação à formulação apresentada foi avaliada a partir de dados meteorológicos medidos.

Os primeiros estudos matemáticos sobre balanço de energia na interface ar-água de corpos d'água implicavam em especificar a temperatura da superfície da água. [Haney \(1971\)](#) apresentou uma condição de contorno para oceanos que permite calcular o fluxo de calor sem especificar a temperatura da superfície da água. O autor aborda os conceitos matemáticos e físicos de uma suposta temperatura de equilíbrio atmosférica acoplada com a temperatura da água medida a uma certa profundidade, onde é possível estimar o balanço de energia total.

O balanço de energia foi estimada para o lago Flevo, na Holanda, por [Keijman \(1974\)](#). Os dados meteorológicos foram obtidos de estações que se encontravam às margens do lago e de uma estação principal localizada no centro do lago que foi utilizada como referência. O objetivo do trabalho foi estimar o balanço de energia a partir das estações meteorológicas localizadas às margens do lago e comparar com a estação de referência. A mudança de energia armazenada no lago foi estimada pelo conceito de temperatura de equilíbrio. Para estimar a temperatura da água, supôs-se que não existia estratificação ao longo da coluna d'água. Os resultados de temperatura da água e de energia perdida por evaporação estimados a partir das estações que se encontravam às margens do lago apresentaram boa concordância com os resultados obtidos a partir da estação de referência.

No trabalho realizado por [Sweers \(1976\)](#), uma revisão de literatura sobre a *função da velocidade do vento* foi apresentada. Mostrando através de nomogramas que a função da velocidade do vento é de fundamental importância para estimar o fluxo de calor latente, o fluxo de calor sensível e o coeficiente de troca de calor. O tamanho da área superficial do corpo d'água e a altura na qual é medida a velocidade do vento são apresentados como parâmetros de ajustamento da função da velocidade do vento, uma vez que essa função é definida para corpos d'água específicos.

[Livingstone e Imboden \(1989\)](#) estimaram o balanço de energia anual para o lago Aegeri, Suíça. Dados médios meteorológicos e limnológicos mensais de 12 anos foram utilizados no estudo. Para estimar o balanço de energia total, o conceito de coeficiente de troca de calor e uma temperatura de equilíbrio foram usados. Os resultados mostraram que a radiação de onda longa emitida pela atmosfera comparada com a radiação de onda longa emitida pela superfície da água estão praticamente em fase, porém, com sinais opostos. A somatório desses duas componentes de energia praticamente se cancelaram. Assim, a curva que representa a variação sazonal da radiação de onda curta (radiação solar), a radiação de onda longa (atmosférica) e a radiação de onda longa emitida pela superfície d'água somadas não difere muito da radiação solar sozinha.

## 3 O MODELO MATEMÁTICO

A seção 3.1 apresenta a *Equação de Transferência de Calor Unidimensional Transiente* ou *Equação da Conservação de Energia Unidimensional Transiente* para corpos d'água. As condições iniciais e de contorno também são especificadas. Na subseção 3.1.1, algumas formas de parametrização do *coeficiente de difusão turbulenta* são mostradas.

O *Balço de Energia em Corpos D'água* é apresentado na seção 3.2. Nesta seção, são apresentadas considerações físicas das componentes do balanço de energia, assim como suas formulações matemáticas.

A seção 3.3 apresenta o conceito de *Temperatura de Equilíbrio* e o desenvolvimento de uma formulação analítica para o *Coefficiente de troca de calor* na interface ar-água.

### 3.1 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE

A equação que descreve o ciclo de estratificação térmica em corpos d'água é a *Equação de Transferência de Calor Unidimensional Transiente* dada por [Henderson-Sellers \(1984b, p. 76\)](#):

$$A(z) \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ A(z)(K_M + K_H) \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{1}{\rho_W c} \frac{\partial (A(z)H_s(z))}{\partial z}, \quad (3.1)$$

onde

$A(z)$  = área da seção transversal em função da profundidade ( $z$ ), em  $\text{m}^2$ ;

$T = T(z, t)$  = temperatura da água em função da profundidade ( $z$ ) e do tempo ( $t$ ), em  $^{\circ}\text{C}$ ;

$w$  = velocidade vertical, em  $\text{ms}^{-1}$ ;

$K_M$  = coeficiente de difusão molecular para o calor, em  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ;

$K_H$  = coeficiente de difusão turbulenta para o calor, em  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ;

$\rho_W$  = densidade da água, em  $\text{kgm}^{-3}$ ;

$c$  = calor específico da água, em  $\text{Jkg}^{-1}\text{C}^{-1}$ ; e

$H_s(z)$  = radiação solar de onda curta absorvida internamente ao longo da coluna d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ .

Henderson-Sellers (1984b, p. 76) destaca que as diferenças entre modelos estão relacionadas às desconsiderações de termos da Eq. (3.1) e às parametrizações das variáveis envolvidas. Por exemplo, o termo de advecção vertical,  $w\partial T/\partial z$ , pode ser desprezado considerando que a topografia do fundo é relativamente suave.

O termo de radiação solar absorvida internamente,  $\frac{1}{\rho_w c} \frac{\partial(A(z)H(z))}{\partial z}$ , foi estudado por Dake e Harleman (1969). Os autores mencionam estudos que estão preocupados em supor se a radiação solar incidente é absorvida completamente pela superfície da água ou se é razoável supor completa penetração. Porém, eles concluíram que parece ser mais adequado supor que uma parte da radiação solar é absorvida pela superfície da água e o restante penetra na coluna d'água. Assim, a radiação solar absorvida internamente é suposta variar exponencialmente na vertical como

$$H_s(z) = (1 - \beta)H_0(1 - \alpha_W) \exp(-\eta z) \quad \text{para } z > 0, \quad (3.2)$$

onde  $\beta$  é a proporção de absorção de radiação solar de onda curta na superfície da água (adimensional);  $H_0$  é a radiação solar incidente na superfície da água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;  $\alpha_W$  é o albedo da água (adimensional); e  $\eta$  é o coeficiente de absorção ou extinção, em  $\text{m}^{-1}$ .

Se o corpo d'água é profundo, pode-se supor que a área da seção transversal é constante ( $A(z) = A$ ). Neste caso, tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (K_M + K_H) \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{1}{\rho_w c} \frac{\partial H_s(z)}{\partial z}. \quad (3.3)$$

De acordo com Bedford e Babajimopoulos (1977) citado por Henderson-Sellers (1984b), se a área da seção transversal é considerada constante, deve-se utilizar a *profundidade média* do corpo d'água. Caso a área da seção transversal varia consideravelmente com a profundidade, deve-se utilizar a *profundidade máxima* considerada.

Para que a equação de transferência de calor unidimensional apresente solução única, é necessário especificar as condições iniciais e condições de contorno.

#### Condição Inicial:

O perfil de temperatura inicial,  $T^0(z)$ , deve ser especificado em  $t = 0$ . Logo,

$$T(z, t = 0) = T^0(z) \quad \text{para } 0 \leq z \leq H, \quad (3.4)$$

onde  $H$  pode ser a profundidade média ou máxima do corpo d'água, em m.

#### Condição de Contorno:

A condição de contorno na superfície de um corpo d'água pode ser dada através do fluxo de calor na interface ar-água. Assim, o fluxo de calor na superfície pode ser escrito

de acordo com [Sundaram e Rehm \(1973\)](#) como sendo:

$$\rho_W c (K_M + K_H(0,t)) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -H_n = -K(T_e - T_s), \quad (3.5)$$

onde

$H_n$  = balanço de energia total na interface ar-água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$K$  = coeficiente de troca de calor na interface ar-água, em  $\text{Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$ ;

$T_e$  = temperatura de equilíbrio, em  $^{\circ}\text{C}$ ; e

$T_s$  = temperatura da superfície da água, em  $^{\circ}\text{C}$ .

O ganho ou a perda de energia do corpo d'água é representado pelo balanço de energia total ( $H_n$ ) que, por sua vez, é a soma algébrica das trocas de calor que ocorrem na superfície da água. A linearização do balanço de energia total é dado pelo coeficiente de troca de calor ( $K$ ) multiplicando a diferença da temperatura de equilíbrio ( $T_e$ ) e da temperatura superfície da água ( $T_s$ ). O conceito físico e matemático do coeficiente de troca de calor e da temperatura de equilíbrio serão mostrados mais adiante (Seção 3.3).

Para o fundo de corpos d'água, na prática, supõe-se que o fluxo de calor é desprezível. Portanto, a condição de contorno no fundo é expressa como

$$\rho_W c (K_M + K_H(H,t)) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (3.6)$$

### 3.1.1 O COEFICIENTE DE DIFUSÃO TURBULENTA PARA O CALOR

O coeficiente de difusão turbulenta para o calor em corpos d'água pode ser escrito como o produto do coeficiente de difusão turbulenta para o estado neutro ( $K_{H_0}$ ) e uma função de um apropriado parâmetro de estabilidade que caracteriza a estratificação  $f(S)$  ([SUNDARAM; REHM, 1971b](#)):

$$K_H = K_{H_0} f(S). \quad (3.7)$$

O parâmetro de estabilidade,  $S$ , é geralmente dado pelo número de Richardson ( $R_i$ ), sendo

$$R_i = g \frac{(\partial \rho / \partial z)}{\rho (\partial u / \partial z)^2} = -g \frac{\alpha_v (\partial T / \partial z)}{(\partial u / \partial z)^2}, \quad (3.8)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade, em  $\text{ms}^{-2}$ ;  $\rho$  é a densidade da água, em  $\text{kgm}^{-3}$ ;  $u$  é a componente horizontal da velocidade da água, em  $\text{ms}^{-1}$ ;  $\alpha_v$  é o coeficiente de expansão térmica da água ou coeficiente expansão volumétrica da água, em  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ; e  $T$  é a temperatura da água, em  $^{\circ}\text{C}$ .

Um problema enfrentado na Eq. (3.8) é a necessidade de se conhecer o campo de velocidade horizontal. Porém, quando o vento sopra sobre a superfície de um corpo d'água, a turbulência nas camadas superiores é predominantemente causada pelo cisalhamento e pela quebra de ondas (SUNDARAM; REHM, 1971b). Assim, pode-se supor que a geração de turbulência nas camadas superiores é caracterizada pelas condições superficiais sem precisar conhecer explicitamente a componente horizontal da velocidade da água,  $u$ .

A teoria de camada limite está relacionada ao aparecimento de um perfil logarítmico de velocidade do vento ao se aproximar de uma superfície sólida, por exemplo, a superfície da terra. No entanto, natureza logarítmica do perfil de velocidade do vento tem sido confirmada próximo a superfície da água (WU, 1980).

De acordo com a maioria dos trabalhos de estratificação térmica vertical revisados, basicamente, o cisalhamento da velocidade,  $\partial u/\partial z$ , é aproximado pela *teoria de camada limite* (válida apenas para condições neutras) dada por

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}, \quad (3.9)$$

onde  $u_*$  é a velocidade de atrito, em  $\text{ms}^{-1}$ ;  $k$  é a constante de von Kármán (adimensional); e  $z$  é a posição vertical do ponto a partir da superfície da água, em m.

Logo, o número de Richardson para modelos de estratificação térmica pode ser escrito do seguinte forma

$$R_i = -\frac{g\alpha_v k^2 z^2}{u_*^2} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Na prática, a velocidade de atrito pode ser estimada como

$$u_* = \left( \frac{\tau_s}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad (3.11)$$

onde  $\tau_s$  é a tensão de atrito superficial, em  $\text{Nm}^{-2}$ .

A tensão de atrito superficial causada por uma velocidade constante do ar adjacente a uma superfície homogênea e horizontal da água pode ser escrita em termos da velocidade do vento medida a uma altura fixa ((TAYLOR, 1916) citado por (GARRATT, 1977)). Assim,

$$\tau_s = \rho_{ar} C_D U^2, \quad (3.12)$$

onde  $\rho_{ar}$  é a densidade do ar, em  $\text{kgm}^{-3}$ ;  $C_D$  é o coeficiente de arrasto (adimensional); e  $U$  é a velocidade do vento medida a uma altura fixa acima da superfície do corpo d'água, em  $\text{ms}^{-1}$ . Geralmente, a velocidade do vento é medida a 2, 8 ou 10 metros de altura.



Tabela 1 – Valores utilizados de  $\sigma_1$  e  $p$  em estudos anteriores.

$\sigma_1$	$p$	Referências
3,33	1,5	MUNK e ANDERSON (1948) citado por <a href="#">James (1977)</a>
0,276	1	KENT e PRITCHARD (1959) citado por <a href="#">James (1977)</a>
0,1	1	<a href="#">Sundaram e Rehm (1971b)</a>
0,3	1,5	<a href="#">James (1977)</a>
0,048	1	<a href="#">Walters, Carey e Winter (1978)</a>
0,10	0,62	<a href="#">Antonopoulos e Gianniu (2003)</a> Simulação para o ano de 1981
0,07	0,95	<a href="#">Antonopoulos e Gianniu (2003)</a> Simulação para o ano de 1993

Tabela 2 – Algumas formas de  $K_{H_0}$ .

$K_{H_0} =$	Referências
$c_1 u_*$	<a href="#">Sundaram e Rehm (1971b)</a>
$c_2 U^2$ $U > 4,2$ $\text{ms}^{-1}$	<a href="#">James (1977)</a>
$c_3 U^3$ $U < 4,2$ $\text{ms}^{-1}$	<a href="#">James (1977)</a>
$c_4 U$	<a href="#">Walters, Carey e Winter (1978)</a>

A velocidade de atrito é estimada da seguinte forma

$$u_* = \left( \frac{\rho_{ar}}{\rho_w} C_D U^2 \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

A expressão para a função de estabilidade pode ser dada como ([SUNDARAM; REHM, 1971b](#); [JAMES, 1977](#); [WALTERS; CAREY; WINTER, 1978](#)):

$$f(R_i) = (1 + \sigma_1 R_i)^{-p}, \quad (3.14)$$

onde  $\sigma_1$  e  $p$  são constantes empíricas adimensionais. A Tabela 1 mostra os valores de  $\sigma_1$  e  $p$  utilizados em alguns estudos.

O coeficiente de difusão turbulenta para o calor no estado neutro,  $K_{H_0}$ , é suposto constante em relação à profundidade por [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#), [James \(1977\)](#) e [Walters, Carey e Winter \(1978\)](#). Porém, ele é parametrizado em função da velocidade de atrito ou da velocidade do vento. Algumas formas de  $K_{H_0}$  são mostrados na Tabela 2, onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes empíricas.

## 3.2 BALANÇO DE ENERGIA EM CORPOS D'ÁGUA

De acordo com [Livingstone e Imboden \(1989\)](#), os mecanismos de troca de calor que ocorrem em lagos e reservatórios podem ser dados por

$$H_n = H_s + H_a + H_b + H_e + H_c, \quad (3.15)$$

onde

$H_n$  = balanço total de fluxos através da superfície d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$H_s$  = radiação de onda curta absorvida pelo corpo d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$H_a$  = radiação de onda longa emitida pela atmosfera e absorvida pelo corpo d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$H_b$  = radiação de onda longa emitida a partir da superfície d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$H_e$  = termo de troca de calor não radiativo relacionado à evaporação superficial do corpo d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$  (fluxo de calor latente); e

$H_c$  = termo de troca de calor não radiativo relacionado à condução de calor superficial do corpo d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$  (fluxo de calor sensível).

Os efeitos da troca de calor com o fundo do corpo d'água, o calor transportado pela precipitação e fontes de calor laterais foram considerados desprezíveis na avaliação da Eq. (3.15).

A estimativa do balanço de energia total ( $H_n$ ) tem sido usada de duas maneiras distintas para a predição de temperatura em corpos d'água. Ou os fluxos são estimados a partir de dados meteorológicos e usados diretamente para obter um balanço de energia total, ou os dados meteorológicos são usados para estimar uma temperatura de equilíbrio fictícia,  $T_e$ .

Os processos de transferência de calor em corpos d'água são, basicamente, os fluxos de calor de entrada e saída devido aos afluentes e efluentes, respectivamente; água subterrânea, águas de degelo se for o caso; efeitos antropogênicos como descarte de águas residuárias; e acima de tudo, os processos de troca de calor com a atmosfera (BOGAN; MOHFSENI; STEFAN, 2003).

Embora, exista fluxo de calor entrando e saindo dos lados de um corpo d'água e no fundo, muitas vezes, esses fluxos podem ser desprezados em modelos de evolução térmica. Esta é uma aproximação válida para lagos e reservatórios com grandes tempos de residência (HENDERSON-SELLERS, 1984b, p. 33).

Os termos radiativos absorvidos pelo corpo d'água,  $H_s$  e  $H_a$ , são sempre positivos e o termo radiativo de emissão ( $H_b$ ) é sempre negativo. Enquanto que os termos que representam a transferência de calor não radiativos  $H_e$  e  $H_c$  podem ter valores positivos ou negativos (LIVINGSTONE; IMBODEN, 1989). Os componentes do balanço de energia são apresentados abaixo, assim como suas formulações matemáticas e considerações físicas.

#### Formulação de $H_s$ :

A radiação de onda curta incidente na superfície de um corpo d'água pode ser medida diretamente por radiômetros. Entretanto, ao observar com mais detalhe a trans-

missão de radiação de onda curta através da atmosfera, nota-se uma dependência da distribuição vertical de aerossóis, bem como a profundidade, extensão e altura das nuvens (HENDERSON-SELLERS, 1984b, p. 39).

Segundo Dake e Harleman (1969), a radiação de onda curta absorvida pela superfície da água e a radiação absorvida pelo coluna d'água são expressas da seguinte forma

$$H_s = \beta H_0(1 - \alpha_W) \quad \text{em } z = 0 \quad \text{e} \quad (3.16)$$

$$H_s(z) = (1 - \beta)H_0(1 - \alpha_W) \exp(-\eta z) \quad \text{para } z > 0, \quad (3.17)$$

onde

$H_s$  = radiação de onda curta total disponível para o corpo d'água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$H_0$  = radiação incidente na superfície da água, em  $\text{Wm}^{-2}$ ;

$\alpha_W$  = albedo da água (adimensional);

$\beta$  = proporção de absorção de radiação de onda curta na superfície d'água (adimensional); e

$\eta$  = coeficiente de absorção ou extinção, em  $\text{m}^{-1}$ .

A superfície da água é umas das superfícies menos refletoras. Os valores encontrados para o albedo da água varia de 3% a 10% (DAKE; HARLEMAN, 1969).

A proporção de absorção de radiação de onda curta,  $\beta$ , é dada por uma certa fração que é absorvida pela superfície da água. A radiação absorvida restante,  $(1 - \beta)$ , penetra no corpo d'água a partir de uma absorção exponencial prevista pela Lei de Beer (ELDER e WUNDERLICH (1968) citado por Henderson-Sellers (1984b, p. 42)).

O coeficiente de extinção,  $\eta$ , é uma medida da taxa na qual a luz é absorvida abaixo da superfície da água, tal que a radiação incidente alcança as primeiras camadas de corpos d'água. O valor do coeficiente de extinção é raramente medido de forma direta. Para obter o coeficiente de extinção, utiliza-se medidas limnológicas usando o disco de Secchi. A profundidade do disco de Secchi,  $d$  em metros, é a média da profundidade onde pode-se visualizar o disco dentro do corpo d'água, medida realizada duas vezes. O valor de  $d$  é inversamente proporcional a  $\eta$  e é dado por (HENDERSON-SELLERS, 1984b):

$$\eta = \frac{1,7}{d}. \quad (3.18)$$

#### Formulação de $H_a$ :

Um estudo de revisão sobre radiação emitida pela atmosfera,  $H_a$ , a partir de um céu claro foi apresentado por Anderson (1954). Sendo as formulações obtidas por Angstrom

Tabela 3 – Valores das constantes empíricas  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$ .

Constantes	Angstrom (1915)	Brunt (1944)
$a$	0,71 a 0,81	0,34 a 0,62
$b$	0,24 a 0,33	0,029 a 0,082
$\gamma$	0,04 a 0,074	

e Brunt, ambos citados pelo autor, como sendo as de maior destaque. Assim, a radiação de onda longa emitida pela atmosfera pode ser escrita como

$$\frac{H_a}{\sigma(T_a + 273)^4} = \varepsilon_a = a - b \exp(-\gamma e_a) \quad \text{Angstrom,} \quad (3.19)$$

$$\frac{H_a}{\sigma(T_a + 273)^4} = \varepsilon_a = a + b\sqrt{e_a} \quad \text{Brunt,} \quad (3.20)$$

onde

$\varepsilon_a$  = emissividade de calor da atmosfera (adimensional);

$\sigma$  = constante de Stephan-Boltzman, em  $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  e igual a  $5,67 \times 10^{-8}\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  ou  $4,899 \times 10^{-6}\text{kJm}^{-2}\text{dia}^{-1}\text{K}^{-4}$ ;

$T_a$  = temperatura do ar, em °C;

$a$ ,  $b$  e  $\gamma$  = constantes empíricas, adimensionais; e

$e_a$  = pressão de saturação de vapor à temperatura do ar, em mbar.

A Tabela 3 apresenta os valores dos intervalos das constantes empíricas  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$ .

Livingstone e Imboden (1989) utilizaram uma expressão para  $\varepsilon_a$  obtida por Brutsaert (1975) para céu claro dada por

$$\varepsilon_a = 1,24 \left( \frac{e_a}{T_a} \right)^{1/7}, \quad (3.21)$$

onde  $e_a$  é a pressão de saturação de vapor à temperatura do ar em hPa e  $T_a$  é a temperatura do ar em K.

Ainda para céu claro, a emissividade da atmosfera pode ser função da temperatura do ar apenas (Idso e Jackson (1969) citado por Hondzo e Stefan (1991) e Bogan, Mohseni e Stefan (2003)). Podendo ser escrito como

$$\varepsilon_a = [1 - 0,261 \exp(-7,77 \times 10^{-4} T_a^2)], \quad (3.22)$$

onde  $T_a$  é a temperatura do ar em °C.

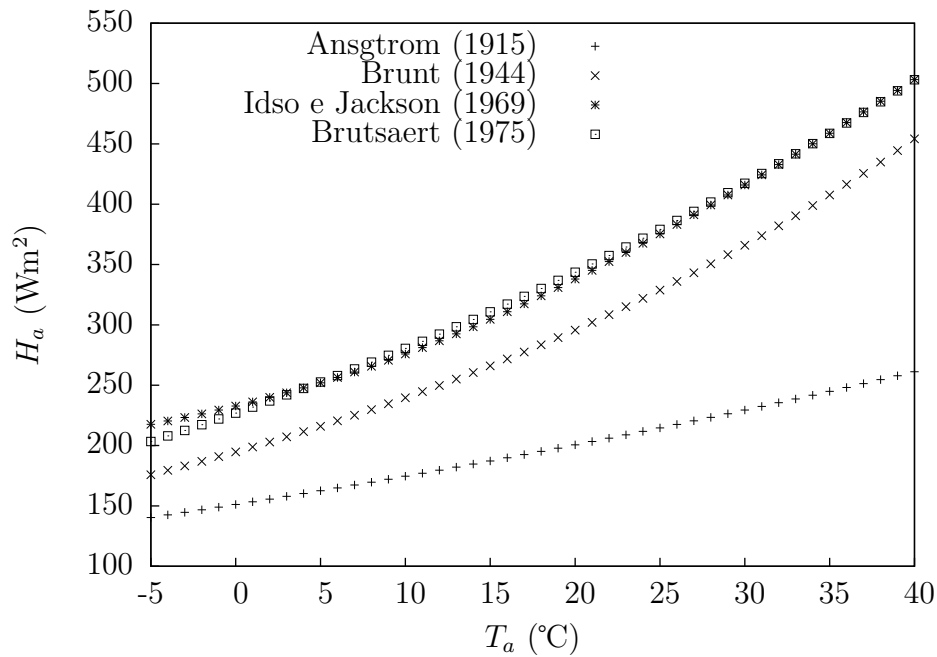


Figura 1 – Diferentes formulações para a estimativa da radiação de onda longa emitida pela atmosfera para céu claro.

Na presença de nuvens, a radiação emitida pela atmosfera é maior. A cobertura de nuvens causa um aumento em  $\varepsilon_a$  por um fator dado por

$$\varepsilon_a \propto (1 + k_1 C_4^e), \quad (3.23)$$

onde

$k_1$  = dependente do tipo de nuvens;

$e$  = constante empírica e geralmente igual a 2; e

$C_4$  = cobertura de nuvens, em percentagem.

O coeficiente  $k_1$  apresenta um intervalo de 0,04 (Cirrus) a 0,25 (Nimbostratus) e seu principal valor para 8 tipos de nuvens é 0,17, sendo o valor frequente usado na literatura quando o tipo de nuvem é desconhecido (Brutsaert (1982) citado por [Livingstone e Imboden \(1989\)](#)).

A Figura 1 mostra as formulações revisadas para a estimativa de  $H_a$  para céu claro para um intervalo de temperatura do ar de -5 a 40 °C. A média aritmética dos intervalos das constantes de Angstrom e Brunt foram calculadas para a obtenção dos resultados.

#### Formulação de $H_b$ :

A radiação de onda longa emitida a partir da superfície da água é dada por

(EDINGER; DUTTIWELLER; GEYER, 1968)

$$H_b = \varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^4, \quad (3.24)$$

onde

$\varepsilon_W$  = emissividade de calor da água (adimensional), é geralmente igual a 0,97; e

$T_s$  = temperatura superficial da água, em °C.

#### Formulação de $H_e$ :

De acordo com Sweers (1976), a perda de calor devida à evaporação na superfície de um corpo d'água pode ser descrita pela seguinte formulação

$$H_e = f(U)(e_s - e_d), \quad (3.25)$$

onde

$f(U)$  = função dependente da velocidade do vento medido, em  $\text{Wm}^{-2}\text{mbar}^{-1}$ ;

$U$  = velocidade do vento medida a uma determinada altura da superfície d'água, em  $\text{ms}^{-1}$ ;

$e_s$  = pressão de saturação de vapor à temperatura superficial da água, em Pa; e

$e_d$  = pressão de saturação de vapor à temperatura do ponto de orvalho, em Pa.

As pressões de saturação de vapor entre a temperatura do ponto de orvalho e a temperatura do ar se relacionam por:

$$R_h = \frac{e_d}{e_a}, \quad (3.26)$$

onde  $R_h$  é umidade relativa, em %.

A pressão de saturação de vapor à uma dada temperatura  $T$  em °C pode ser expressada como (CHOW, 1988):

$$e(T) = 611 \exp\left(\frac{17,27T}{237,3 + T}\right) \text{ em Pa.} \quad (3.27)$$

A função da velocidade do vento,  $f(U)$ , foi estudada por Sweers (1976). Ele sugeriu entre vários trabalhos revisados que a formulação apresentada por McMillan em 1971 obteve os melhores resultados. De forma geral, a função da velocidade do vento pode ser dada por

$$f_1(U) = C_1(3,6 + 2,50C_2U_h); \quad \text{ou} \quad (3.28)$$

Tabela 4 – As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  como uma função da altura  $h$  acima da superfície. Adaptado de Sweers (1976).

$h$ (m)	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	1,05	1,18	
2	1,02	1,06	1,21
3	1,00	1,00	1,15
4	0,99	0,96	1,11
5	0,97	0,93	1,08
6	0,96	0,91	1,05
8	0,95	0,89	1,02
10	0,95		1,00
12			0,97

$$f_2(U) = 4,4 + 1,82C_3U_h, \quad (3.29)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes empíricas apresentadas na Tabela 4 e  $U_h$  corresponde à velocidade do vento medida na altura  $h$ .

A influência do tamanho da área superficial do corpo d'água em  $f(U)$  foi relatada por Harberck (1962,1964) citado por Sweers (1976). Assim, é necessário ajustar  $f(U)$  para diferentes corpos d'água em consideração. O termo que relaciona as áreas,  $R_{1,2}$ , é definido por

$$R_{1,2} = \frac{A_1^{-0,05}}{A_2^{-0,05}} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{0,05}, \quad (3.30)$$

onde

$A_1$  = área superficial onde se deseja ajustar  $f(U)$ , em  $m^2$ ; e

$A_2$  = área superficial de onde foi obtida  $f(U)$ , em  $m^2$ .

Logo,

$$f(U) = R_{1,2}f_1(U) \quad \text{ou} \quad (3.31)$$

$$f(U) = R_{1,2}f_2(U) \quad (3.32)$$

em comparação à função da velocidade do vento obtida por McMillan citado por Sweers (1976). A relação entre as áreas é aplicada apenas quando os dados meteorológicos forem coletados sobre o corpo d'água ou nas suas margens.

**Formulação de  $H_c$ :**

Bowen (1926) apresentou um estudo teórico onde sugeriu que a energia perdida por calor sensível e evaporação seguem a mesma lei. Sendo possível representar uma relação entre essas duas energias. Logo, a relação de Bowen,  $R_B$ , pode ser expressa como

$$R_B = \frac{H_c}{H_e} = 9,41 \times 10^5 \frac{\rho_{ar} c_{par}}{L} \frac{(T_s - T_a)}{(e_s - e_d)} \frac{P}{760}, \quad (3.33)$$

onde

$9,41 \times 10^5$  tem unidade de  $\text{m}^3\text{g}^{-1}$ ;

$\rho_{ar}$  = densidade da ar, em  $\text{gm}^{-3}$ ;

$c_{par}$  = calor específico do ar, em  $\text{calg}^{-1}\text{C}^{-1}$ ;

$L$  = calor latente de vaporização, em  $\text{calg}^{-1}$ ;

$T_s$  = temperatura da superfície da água, em  $^{\circ}\text{C}$ ;

$T_a$  = temperatura do ar medida a uma dada altura, em  $^{\circ}\text{C}$ ;

$e_s$  = pressão de vapor de saturação à temperatura superficial da água, em mmHg;

$e_d$  = pressão de vapor de saturação à temperatura do ponto de orvalho, em mmHg;

e

$P$  = pressão atmosférica, em mmHg.

Chamando

$$B = 9,41 \times 10^5 \frac{\rho_a c_{pa}}{L} \frac{P}{760}, \quad (3.34)$$

onde  $B$  é a constante de Bowen. Substituindo  $\rho_{ar} = 0,01293 \text{ gm}^{-3}$ ,  $c_{pa} = 0,241 \text{ CalKg}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $L = 585 \text{ CalKg}^{-1}$  e  $P = 760 \text{ mmHg}$  (ver Bowen (1926)). Tem-se  $B = 0,501 \text{ mmHg}^{\circ}\text{C}^{-1}$  ou  $B = 65,92 \text{ Pa}^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Assim, a relação de Bowen pode ser simplificada da seguinte forma

$$R_B = \frac{H_c}{H_e} = B \frac{(T_s - T_a)}{(e_s - e_d)}. \quad (3.35)$$

Substituindo a Eq. (3.25) na Eq. (3.35), o fluxo de calor sensível trocado entre a superfície da água e o ar poder ser expresso como

$$H_c = Bf(U)(T_s - T_a) \quad \text{em} \quad \text{Wm}^{-2}. \quad (3.36)$$



### 3.3 A TEMPERATURA DE EQUILÍBRIO E O COEFICIENTE DE TROCA DE CALOR

A troca de calor na interface ar-água de corpos d'água é influenciada por radiação de onda curta, radiação de onda longa, evaporação e condução, entre outros processos. O balanço de energia na interface ar-água por unidade de área é dado por (ver Seção 3.2)

$$H_n = H_s + H_a + H_b + H_e + H_c. \quad (3.37)$$

Os termos  $H_s$  e  $H_a$  são denominados de *radiação absorvida* e são independentes da temperatura da superfície da água. Normalmente,  $H_s$  é medido diretamente e  $H_a$  é estimado a partir de observações meteorológicas. Os termos  $H_b$ ,  $H_e$  e  $H_c$  são dependentes da temperatura da superfície da água bem como da temperatura do ar, pressão de vapor e velocidade do vento.

Para uma melhor visualização da necessidade de conhecer previamente as condições atmosféricas, pode-se reescrever a Eq. (3.37) da seguinte forma

$$H_n = \beta H_0(1 - \alpha_W) + \varepsilon_a \sigma (T_a + 273)^4 - \varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^4 - f(U)(e_s(T_s) - e_d) - Bf(U)(T_s - T_a), \quad (3.38)$$

onde as únicas incógnitas na Eq. (3.38) seriam  $H_n$  e  $T_s$ .

Um caso particular da Eq. (3.38) é supor que o corpo d'água está em equilíbrio como a atmosfera, ou seja, a soma dos componentes do balanço de energia seria igual a zero ( $H_n = 0$ ). Logo, a temperatura da superfície da água,  $T_s$ , pode ser denominada como uma temperatura de equilíbrio fictícia,  $T_e$ . Assim, tem-se

$$0 = \beta H_0(1 - \alpha_W) + \varepsilon_a \sigma (T_a + 273)^4 - \varepsilon_W \sigma (T_e + 273)^4 - f(U)(e_s(T_e) - e_d) - Bf(U)(T_e - T_a). \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) é não-linear em  $T_e$  e pode ser resolvida computacionalmente por meio de métodos iterativos (ex.: *Método de Newton-Raphson*).

Segundo [Edinger, Duttiweller e Geyer \(1968\)](#), uma vez que a diferença entre a temperatura de equilíbrio e a temperatura da superfície da água é relativamente pequena, considerando médias meteorológicas de longo período (ex.: médias diárias, semanais e mensais), pode-se estimar  $H_n$  através de uma função linear dada por

$$H_n = K(T_e - T_s), \quad (3.40)$$

onde  $K$  é o coeficiente de troca de calor em  $\text{Wm}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

De acordo com Sweers (1976), o coeficiente de troca de calor é definido por

$$K = -\frac{\partial H_n}{\partial T_s} = -\left(\frac{\partial H_b}{\partial T_s} + \frac{\partial H_e}{\partial T_s} + \frac{\partial H_c}{\partial T_s}\right). \quad (3.41)$$

Os três últimos termos da Eq. (3.41) serão analisados separadamente abaixo.

A perda de radiação por onda longa pela superfície da água é ( $H_b$ ):

$$H_b = -\varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^4. \quad (3.42)$$

A derivada primeira em relação à  $T_s$  é:

$$\frac{\partial H_b}{\partial T_s} = -4\varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^3 \quad (3.43)$$

A perda de energia por evaporação ( $H_e$ ) é estimada como:

$$H_e = -f(U)(e_s - e_d). \quad (3.44)$$

onde

$$e_s = 611 \exp\left(\frac{17,27T_s}{237,3 + T_s}\right). \quad (3.45)$$

A derivada primeira de  $H_e$  em relação à  $T_s$  é dada por:

$$\frac{\partial H_e}{\partial T_s} = -f(U) \frac{\partial e_s}{\partial T_s}, \quad (3.46)$$

A derivada primeira da pressão de vapor em relação à temperatura da superfície da água é:

$$\frac{\partial e_s}{\partial T_s} = 611 \exp\left(\frac{17,27T_s}{237,3 + T_s}\right) \left(\frac{17,27(237,3 + T_s) - 17,27T_s}{(237,3 + T_s)^2}\right) \quad (3.47)$$

Logo, a derivada primeira de  $H_e$  em relação à  $T_s$  pode ser expressa como:

$$\frac{\partial H_e}{\partial T_s} = -f(U) 611 \exp\left(\frac{17,27T_s}{237,3 + T_s}\right) \left(\frac{17,27(237,3 + T_s) - 17,27T_s}{(237,3 + T_s)^2}\right) \quad (3.48)$$

A função da velocidade do vento,  $f(U)$ , pode ser obtida a partir da seção 3.2.

A perda ou ganho de energia por calor sensível é:

$$H_c = -Bf(U)(T_s - T_a). \quad (3.49)$$

A derivada de  $H_c$  com relação à  $T_s$  torna-se:

$$\frac{\partial H_c}{\partial T_s} = -Bf(U). \quad (3.50)$$

Logo, o coeficiente de troca de calor dado pela Eq. (3.41) pode ser definido analiticamente como uma função da temperatura da superfície da água e da velocidade do vento, tornando-se:

$$K = 4\varepsilon_W\sigma(T_s + 273)^3 + f(U)611 \exp\left(\frac{17,27T_s}{237,3 + T_s}\right) \left(\frac{17,27(237,3 + T_s) - 17,27T_s}{(237,3 + T_s)^2}\right) + Bf(U) \quad (3.51)$$

A priori, pode-se conhecer possíveis valores do coeficiente de troca de calor considerando um intervalo de variação da temperatura da superfície da água e valores constantes para a velocidade do vento. Utilizando uma função da velocidade do vento para uma altura de 10 metros, tem-se (ver seção 3.2):

$$f(U_{10}) = 4,4 + 1,82C_3U_{10}, \quad (3.52)$$

onde  $C_3 = 1,00$ .

A Figura 2 ilustra os possíveis valores de  $K$  variando com a temperatura da superfície da água e diferentes valores de velocidade do vento. Nota-se que quanto maior a temperatura da superfície da água e velocidade do vento maior é o coeficiente de troca de calor.

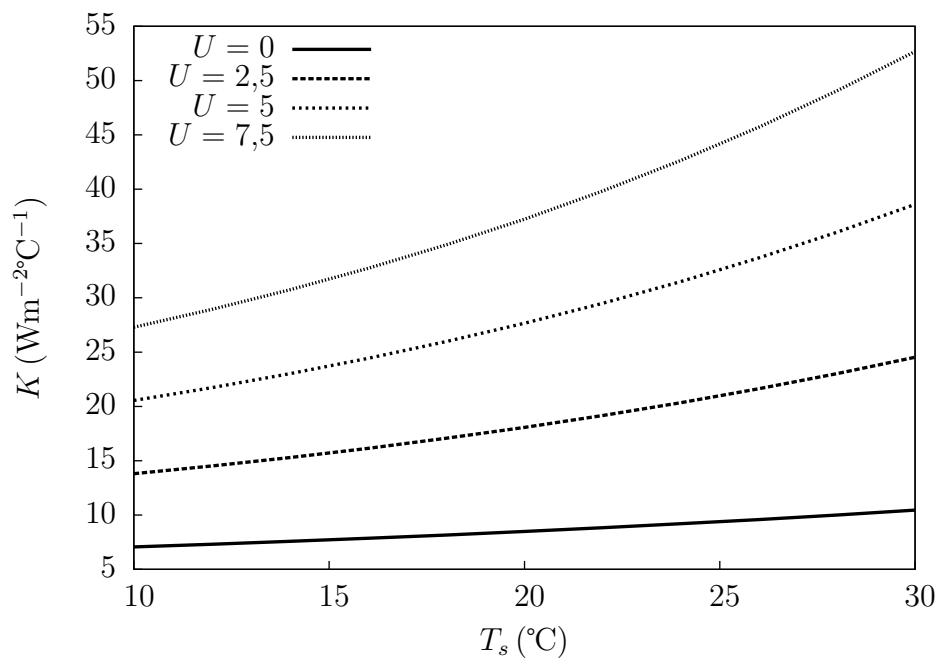


Figura 2 – Estimativa do coeficiente de troca de calor obtido pela solução analítica.

# 4 MATERIAL E MÉTODOS

## 4.1 MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A mecânica dos fluidos computacional é a ciência que estuda as previsões quantitativas do fluido produzida computacionalmente baseada nas seguintes leis da conservação (COHEN; KUNDO, 2000, p. 378):

- conservação da massa;
- conservação da quantidade de movimento; e
- conservação da energia.

As previsões quantitativas ocorrem sob condições definidas em termos de:

- geometria de escoamento;
- propriedade física de um fluido; e
- condições iniciais e de contorno.

O usuário de mecânica dos fluidos computacional está interessado em saber as distribuições de velocidades, pressões e temperatura entre outras variáveis escalares e vetoriais em uma região de escoamento (FORTURNA, 2000, p. 21). Diferentes tipos de métodos numéricos têm sido desenvolvidos para simular os fluxos de fluidos. Entre esses métodos incluem-se:

- Método de Diferenças Finitas (MDF);
- Método de Elementos Finitos (MEF);
- Método de Volumes Finitos (MVF); e
- Métodos Espectrais (ME).

Todos os métodos numéricos citados acima são aproximações na tentativa de resolver um problema físico (COHEN; KUNDO, 2000, p. 379-380). As estimativas pelo MDF, por exemplo, nunca são completamente exatas. As fontes de erros são:

1. Erros de discretização: Este está intrínseco em todo método numérico. Esse erro está relacionada à discretização no espaço e/ou no tempo usado para resolver o campo de fluxo. É importante selecionar um método numérico correto e escolher uma discretização para manter esses erros em um nível aceitável;
2. Erros nos dados de entrada: Isto é devido ao fato que a geometria do escoamento e as propriedades do fluido são conhecidas de maneiras aproximadas;
3. Erros nas condições iniciais e de contorno: Estas propriedades também não são conhecidas exatamente e são apenas aproximações; e
4. Erros de modelagem: Fluxos muito complicados podem envolver fenômenos físicos que não são perfeitamente descritos pela teoria científica atual. Como exemplo, tem-se os modelos de turbulência, modelagem atmosférica, problemas em fluidos multi-fases, etc.

Ainda sim, o MDF tem inúmeras vantagens:

1. Ele pode ser produzido de forma barata e rápida pela via computacional;
2. Ele gera informações completas: produz informações completas de todas as variáveis relevantes em todo o domínio de interesse;
3. Permite uma fácil troca de parâmetros facilitando a otimização;
4. Tem a capacidade de simular condições realistas e práticas, onde um modelo de escala pequena ou grande pode ser necessitado; e
5. Tem a capacidade de simular condições ideais: proporciona a conveniência de mudar certos parâmetros na equação governante na qual permite a atenção em uns poucos parâmetros essenciais e elimina todas as características irrelevantes.

## 4.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

De modo a sistematizar a construção da solução numérica, a equação da transferência de calor unidimensional será discretizada pelo método de diferenças finitas. O processo de obtenção de solução numérica consiste nos seguintes estágios:

**Estágio 1:** Modelo Matemático – Obtenção das Equações Diferenciais Parciais governantes e condições iniciais e de contorno;

**Estágio 2:** Aproximação Numérica – Discretização e obtenção de um sistema algébrico de equações lineares; e

**Estágio 3:** Solução Numérica – Solucionar o sistema computacionalmente e consequentemente obter a solução numérica aproximada.

O segundo estágio converte as equações governantes e as condições iniciais e de contorno em um sistema discreto de equações lineares. Este estágio é denominado *discretização*. O processo de discretização é facilmente identificado com o método de diferenças finitas, mas é menos óbvio com o método de elementos finitos, métodos de volumes finitos ou métodos espectrais (FLETCHER, 1992, p. 47). O terceiro estágio do processo de solução computacional requer a solução do sistema fornecida pelas equações algébricas.

Para converter as Equações Diferenciais Parciais governantes em um sistema de equações algébricas, pode-se usar o Método de Diferenças Finitas, o Método de Elementos Finitos, o Método de Volumes Finitos ou Método Espectral. Na prática, derivadas temporais são discretizadas usando quase sempre o método de diferenças finitas, já as derivadas espaciais podem ser discretizadas pelo MDF, MEF, MVF ou ME. Conforme a maior parte dos trabalhos revisados, o MDF é largamente utilizado para a obtenção da solução numérica da equação da transferência de calor unidimensional e portanto, também será utilizado no presente trabalho. Abaixo é apresentado o desenvolvimento dos três estágios citados anteriormente para a obtenção da solução numérica citados anteriormente.

**Estágio 1:**

A equação da transferência de calor unidimensional simplificada será usada aqui como exemplo para o desenvolvimento do Método de Diferenças Finitas e pode ser escrita como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_H \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad 0 \leq z \leq H. \quad (4.1)$$

O coeficiente de difusão molecular para o calor  $K_M$ , a radiação solar de onda curta que penetrara ao longo da coluna d'água ( $\frac{1}{\rho_w c} \frac{\partial(A(z)H_s(z))}{\partial z}$ ), o termo de advecção vertical ( $w \frac{\partial T}{\partial z}$ ), a princípio, foram considerados desprezíveis. A área da seção transversal ( $A(z)$ ) foi suposta constante.

A condição inicial é:

$$T(z, t = 0) = T^0(z). \quad (4.2)$$

onde  $T^0(z)$  é um perfil de temperatura conhecido.

A condição de contorno da superfície,  $z = 0$ , é:

$$\rho_w c K_H(0, t) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -H_n = -K(T_e - T_s) \quad \text{para } t > 0. \quad (4.3)$$

Para o fundo,  $z = H$ , tem-se:

$$\rho_w c K_H(H, t) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (4.4)$$

### Estágio 2:

A discretização da equação será deduzida pela integração da Eq. (4.1). A variável espacial considerada na vertical pode ser discretizada da seguinte forma ( $z = i - 1, z + \Delta z = i, z + 2\Delta z = i + 1, \dots$ ), onde o índice  $i$  corresponde à discretização espacial. A variável temporal pode ser discretizada da seguinte forma ( $t = j, t + \Delta t = j + 1, t + 2\Delta t = j + 2, \dots$ ), onde o índice  $j$  corresponde à discretização temporal. Assim, deseja fazer a integração em torno do ponto  $i$  e no passo de tempo de  $j$  a  $j + 1$ . Logo, tem-se

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_j^{j+1} \frac{dT}{dt} dt dz = \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{d}{dz} \left( K_H \frac{dT}{dz} \right) dz dt. \quad (4.5)$$

A integração na variável espacial foi feita entre o ponto médio de  $i + 1$  e  $i$  para  $i + 1/2$  e entre o ponto médio de  $i$  e  $i - 1$  para  $i - 1/2$ . A ordem da integração é escolhida de acordo como a natureza do termo. Para a representação do termo  $dT/dt$ , tem-se

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_j^{j+1} \frac{d}{dt} [T] dt dz = \int_{i-1/2}^{i+1/2} T_i^{j+1} dz = (T_i^{j+1} - T_i^j) \Delta z \quad (4.6)$$

Para o lado direito da Eq. (4.5)

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \left[ \frac{d}{dz} \left( K_H \frac{dT}{dz} \right) \right] dz dt &= \int_j^{j+1} \left[ \left( K_H \frac{dT}{dz} \right) \Big|_{i-1/2}^{i+1/2} \right] dt = \\ &= \int_j^{j+1} \left[ \left( K_H \frac{dT}{dz} \right)_{i+1/2} - \left( K_H \frac{dT}{dz} \right)_{i-1/2} \right] dt = \\ &= \int_j^{j+1} \left[ K_{H_{i+1/2}} \frac{(T_{i+1} - T_i)}{\Delta z} - K_{H_{i-1/2}} \frac{(T_i - T_{i-1})}{\Delta z} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Logo, igualando o lado esquerdo com o lado direito da Eq. (4.5), tem-se

$$(T_i^{j+1} - T_i^j) \Delta z = \int_j^{j+1} \left[ K_{H_{i+1/2}} \frac{(T_{i+1} - T_i)}{\Delta z} - K_{H_{i-1/2}} \frac{(T_i - T_{i-1})}{\Delta z} \right] dt. \quad (4.8)$$

Neste ponto, é preciso supor como  $T_{i-1}$ ,  $T_i$  e  $T_{i+1}$  variam com o tempo de  $j$  a  $j + 1$ . Algumas suposições são possíveis e algumas delas podem ser generalizadas pela proposta

$$\int_j^{j+1} T_i dt = [f_p T_i^{j+1} + (1 + f_p) T_i^j] \Delta t, \quad (4.9)$$



onde  $f_p$  é um fator de ponderação entre 0 e 1. Usando a proposta acima, pode-se escrever

$$(T_i^{j+1} - T_i^j)\Delta z = f_p \left[ K_{H_{i+1/2}}^{j+1} \frac{(T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1})}{\Delta z} - K_{H_{i-1/2}}^{j+1} \frac{(T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1})}{\Delta z} \right] \Delta t + (1 - f_p) \left[ K_{H_{i+1/2}}^j \frac{(T_{i+1}^j - T_i^j)}{\Delta z} - K_{H_{i-1/2}}^j \frac{(T_i^j - T_{i-1}^j)}{\Delta z} \right] \Delta t. \quad (4.10)$$

Para certos valores específicos do fator de ponderação,  $f_p$ , a discretização da equação se reduz a alguns tipos de esquemas. Em particular, se  $f_p = 0$ , conduz ao *Esquema Explícito*; se  $f_p = 1/2$ , ao *Esquema de Crank-Nicolson* e se  $f_p = 1$ , ao *Esquema Completamente Implícito*. Neste trabalho, optou-se pelo o Esquema de Crank-Nicolson devido ser *incondicionalmente estável*.

As incógnitas que se deseja conhecer estão no passo de tempo  $j + 1$ . Por outro lado, a temperatura é conhecida no passo de tempo  $j$ , a partir da condição inicial. Assim, reorganizando e separando as aproximações não conhecidas para a temperatura ( $T^{j+1}$ ) das aproximações conhecidas ( $T^j$ ) para o esquema de Crank-Nicolson ( $f_p = 1/2$ ), tem-se

$$-\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i-1/2}}^{j+1}\right) T_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i-1/2}}^{j+1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i+1/2}}^{j+1}\right) T_i^{j+1} - \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i+1/2}}^{j+1}\right) T_{i+1}^{j+1} = T_i^j + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \left[ K_{H_{i+1/2}}^j (T_{i+1}^j - T_i^j) - K_{H_{i-1/2}}^j (T_i^j - T_{i-1}^j) \right]. \quad (4.11)$$

A Eq.(4.11) forma um *Sistema Tridiagonal* de equações lineares e ao resolver o sistema, evolui-se do passo de tempo  $j$  para o passo de tempo  $j + 1$ . Escrevendo as equações lineares para todo o domínio espacial discretizado, a Eq. (4.11) pode ser compactada da seguinte forma

$$eT_{i-1}^{j+1} + fT_i^{j+1} + gT_{i+1}^{j+1} = r, \quad (4.12)$$

onde os coeficientes da *Matriz Tridiagonal* são dados como

$$e = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i-1/2}}^{j+1}; \quad (4.13a)$$

$$f = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i-1/2}}^{j+1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i+1/2}}^{j+1}; \quad (4.13b)$$

$$g = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} K_{H_{i+1/2}}^{j+1}; \quad (4.13c)$$

$$r = T_i^j + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \left[ K_{H_{i+1/2}}^j (T_{i+1}^j - T_i^j) - K_{H_{i-1/2}}^j (T_i^j - T_{i-1}^j) \right]. \quad (4.13d)$$

O coeficiente de difusão turbulenta, por exemplo  $K_{H_{i-1/2}}$ , é usado para representar o valor de  $K_H$  no ponto  $i - 1/2$ , intermediário aos pontos  $i - 1$  e  $i$ . De forma similar, o coeficiente de difusão turbulenta para  $K_{H_{i+1/2}}$ , refere-se ao ponto  $i + 1/2$ , intermediário aos pontos  $i$  e  $i + 1$ . Sendo o coeficiente de difusão turbulenta uma função de  $z$ , deve-se conhecer, portanto, os valores de  $K_H$  nos pontos  $i - 1$ ,  $i$  e  $i + 1$  e assim por diante.

Patankar (1980, p. 44) descreveu duas aproximações matemáticas detalhadamente para tentar expressar um valor correto para  $K_{H_{i-1/2}}$ , por exemplo. Os dois desenvolvimentos conduzem a duas expressões,

$$K_{H_{i-1/2}} = \frac{K_{H_{i-1}} + K_{H_i}}{2}; e \quad (4.14)$$

$$K_{H_{i-1/2}} = \frac{2K_{H_{i-1}}K_{H_i}}{K_{H_{i-1}} + K_{H_i}}, \quad (4.15)$$

onde a Eq. (4.14) representa a *Média Aritmética* e a Eq. (4.15) representa a *Média Harmônica*.

Um exemplo da aplicação destas duas formulações pode ser visto no seguinte caso:

Se  $K_{H_{i-1}} \rightarrow 0$  ou  $K_{H_i} \rightarrow 0$ . Então, para Eq. (4.15), tem-se

$$K_{H_{i-1/2}} \rightarrow 0. \quad (4.16)$$

Isto implica que o coeficiente de difusão turbulenta para o calor no ponto  $i - 1/2$ , torna-se zero devido a uma das interfaces estarem praticamente isolada termicamente (baixo coeficiente de difusão). A média aritmética, por outro lado, teria dado um coeficiente de difusão diferente de zero nesta situação.

A discretização da condição de contorno na superfície é dada pela integração entre os pontos da malha  $i - 1$  e  $i$ . Logo,

$$\int_{i-1}^i \rho_w c K_H \frac{dT}{dz} dz = \int_{i-1}^i -H_n dz. \quad (4.17)$$

As variáveis  $\rho_w$  e  $c$  são consideradas constantes. Portanto, podem ser retiradas da integral. Para o lado direito da Eq. (4.17), o balanço de energia total ( $H_n$ ) é função apenas da variável temporal e poder ser retirada da integral. O desenvolvimento algébrico é realizado abaixo

$$\begin{aligned} \rho_W c \int_{i-1}^i K_H \frac{dT}{dz} dz &= -H_n \int_{i-1}^i dz \iff \rho_W c \int_{i-1}^i K_H dT = -H_n \int_{i-1}^i dz \iff \\ \rho_W c K_{H_{i-1/2}} T|_{i-1}^i &= -H_n z|_{i-1}^i \iff \rho_W c K_{H_{i-1/2}} (T_i - T_{i-1}) = -H_n \Delta z \iff \\ T_i - T_{i-1} &= -\frac{H_n \Delta z}{\rho_W c K_{H_{i-1/2}}}. \end{aligned}$$

Assim, a equação resultante da discretização da condição de contorno imposta na superfície no passo de tempo  $j + 1$  torna-se

$$T_{i-1}^{j+1} - T_i^{j+1} = \frac{H_n^{j+1} \Delta z}{\rho_W c K_{H_{i-1/2}}^{j+1}}. \quad (4.18)$$

Caso a condição de contorno na superfície seja relacionada à temperatura de equilíbrio (ver Eq. (4.3)), a aproximação pelo método de diferenças finitas é dada da seguinte forma

$$\left( 1 + \frac{K^{j+1} \Delta z}{\rho_W c K_{H_{i-1/2}}^{j+1}} \right) T_{i-1}^{j+1} - T_i^{j+1} = \frac{K^{j+1} \Delta z}{\rho_W c K_{H_{i-1/2}}^{j+1}} T_e^{j+1}, \quad (4.19)$$

onde  $T_s = T_{i-1}$ .

Para a condição de contorno no fundo, suponha que o último ponto discretizado seja  $m$  e o penúltimo  $m - 1$ . Assim, a integração fica

$$\int_{m-1}^m \rho_W c K_H \frac{dT}{dz} dz = \int_{m-1}^m 0 dz = 0. \quad (4.20)$$

Como  $\rho_W$ ,  $c$  e  $K_H$  são diferentes de zero. Portanto, o gradiente de temperatura tem que ser zero,  $dT/dz = 0$ . Logo,

$$\frac{T_m^{j+1} - T_{m-1}^{j+1}}{\Delta z} = -T_{m-1}^{j+1} + T_m^{j+1} = 0, \quad (4.21)$$

onde o sobrescrito  $j + 1$  está relacionado ao passo de tempo de interesse.

Note que a Eq. (4.18) e a Eq. (4.21) correspondem à condição de contorno na superfície e no fundo, respectivamente, e são utilizadas para fechar o sistema de equações lineares.

No método de diferenças finitas com esquema de Crank-Nicolson, para evoluir do passo de tempo  $j$  a  $j + 1$ , é preciso conhecer  $K_H$ ,  $K$  e  $T_e$  no passo de tempo  $j + 1$ . Quando não se conhece estes parâmetros em  $j + 1$ , a aproximação é dada de forma iterativa. Os detalhes dessa iteração pode ser visto no **Estágio 3** – Solução Numérica.

### Estágio 3:



end do

Dentro ainda do **Estágio 3** que trata de solução de sistema de equações lineares, espera-se encontrar situações lineares, o que nem sempre é possível. Por exemplo, o coeficiente de difusão turbulenta ( $K_H$ ) e o coeficiente de troca de calor  $K$  são funções da temperatura da água, assim, caracterizando uma situação *não-linear*. Então, a matriz de coeficientes dependerá da temperatura, necessariamente, para o esquema de Crank-Nicolson no passo de tempo  $T^{j+1}$ . Uma das maneiras de resolver problemas de não-linearidade pode ser por *iteração* que envolve as seguintes etapas:

Etapa 1: Inicia-se a solução numérica com uma estimativa para a temperatura, por exemplo  $T^*$ , em todos os pontos da grade ou malha;

Etapa 2: A partir de  $T^*$ , calcula-se a matriz de coeficientes do sistema de equações lineares;

Etapa 3: Resolve-se o conjunto de equações algébricas para obter novos valores de temperatura estimados,  $T_{\text{est}}$ ; e

Etapa 4: Com os valores de  $T^* = T_{\text{est}}$ , retorna-se à Etapa 2 e repete-se o processo até cessar as trocas significativas nos valores de  $T_{\text{est}}$ .

A Etapa 4 é chamada de convergência de iterações. A solução numérica convergida é geralmente a solução correta do sistema de equações não-lineares, embora ela tenha sido alcançada pelo método de solução do sistema de equações lineares (PATANKAR, 1980, p. 47).

O processo iterativo é terminado quando um *critério de parada* ou *convergência* é satisfeito. Alguns critérios de parada podem ser visto em Fortuna (2000, p. 150) e estão descritos abaixo. Dispondo de  $T_{\text{esp}}$  e  $T^*$ , com  $m$  elementos cada, o critério de parada denominado *Máxima Diferença Absoluta* ( $D$ ) é:

$$D = \max_{0 \leq i \leq m} |T_{\text{est}} - T^*|. \quad (4.23)$$

O *Erro Relativo* ( $E$ ) é dado como:

$$E = \frac{D}{M}, \quad M = \max_{0 \leq i \leq m} T_{\text{est}}. \quad (4.24)$$

A *Soma das Diferenças Absolutas* ( $S$ ) é:

$$S = \sum_{i=0}^m |T_{\text{est}} - T^*|. \quad (4.25)$$

Uma vez escolhido o critério de parada, o método iterativo é aplicado até que  $T_{\text{est}}$  e  $T^*$  façam com que  $D$ ,  $E$  ou  $S$ , sejam menores que uma tolerância ( $\epsilon > 0$ ) escolhida. Neste trabalho, o Erro Relativo foi escolhido como critério de parada.

### 4.3 CORREÇÃO DO PERFIL DE TEMPERATURA INSTÁVEL

Quando uma região ou camada de fluido mais densa se encontra acima de uma camada de fluido menos densa, a tendência é que o fluido mais denso desça e o menos denso suba em uma mistura convectiva. Um entre vários motivos que causam diferenças de densidade é o surgimento de diferenças de temperatura no fluido.

Ao considerar uma região no espaço onde se encontra um determinado fluido, pode-se dividi-lo em camadas e supor que cada camada apresenta uma certa energia interna, tratando-se neste caso de temperatura. A energia interna total do sistema é a soma da energia contida em cada camada e pode ser escrita como

$$E = \rho c V \sum_{i=0}^m T_i, \quad (4.26)$$

onde

$E$  = a energia interna total do sistema, em J;

$\rho$  = a densidade do fluido, em  $\text{kgm}^{-3}$ ;

$c$  = o calor específico do fluido, em  $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ;

$V$  = o volume do sistema, em  $\text{m}^3$ ; e

$T$  = a temperatura do fluido ao longo domínio, em K.

O índice  $i$  representa o número de pontos considerados em uma malha espacial. Supondo que se queira estimar a energia da primeira camada, tem-se

$$E_1 = \rho c V_1 \left( \frac{T_0 + T_1}{2} \right). \quad (4.27)$$

Com o mesmo raciocínio acima, calcula-se a energia para as demais camadas, onde a soma da energia de todas as camadas representa a energia total do sistema.

Suponha agora que o perfil de temperatura em um determinado instante,  $j + 1$ , seja instável. Considerando um corpo d'água, a instabilidade se desenvolve normalmente de cima para baixo em uma situação de resfriamento da superfície da água. Supondo que esse perfil instável não persiste por muito tempo, um novo perfil de temperatura,  $T^*$ , pode ser estimado de tal forma que produza uma região de estabilidade neutra na previamente

Tabela 5 – Dados Gerais do Reservatório do Rio Verde. Adaptado de Cunha (2011, p. 50).

Volume médio	25.643.732 m <sup>3</sup>
Área Superficial	5,972 km <sup>2</sup>
Comprimento	9,06 km
Largura média	0,645 km
Perímetro	36,4 km
Profundidade média	5,6 m
Profundidade máxima	11 m
Tempo de Residência médio	218 dias

instável, porém, conservando energia. Isso é possível obrigando que

$$E^* = E^{j+1}. \quad (4.28)$$

Uma aproximação considerada é supor que a instabilidade apenas ocorre nas camadas instáveis. Assim, pode-se dizer que a nova temperatura estimada,  $T^*$ , para as camadas instáveis pode ser escrita como

$$T^* = \frac{T_0^{j+1}}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{NPI-1} T_i^{j+1}}{NCI + \frac{1}{2}}, \quad (4.29)$$

onde,  $NPI$  é o número de pontos instáveis; e  $NCI = NPI - 1$  é o numero de camadas onde ocorrem instabilidade. Os resultados de correção de perfis de temperatura podem ser vistos no Apêndice A

## 4.4 DESCRIÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

A Bacia Hidrográfica do Rio Verde encontra-se localizada entre as latitudes 25°18'S e 25°40'S, e as longitudes 49°21'W e 49°49'W de Greenwich na porção oeste da Região Metropolitana de Curitiba - Brasil (R.M.C.) e abrange quatro municípios: Auracária, Campo Largo, Campo Magro e Balsa Nova. O Rio Verde nasce no município de Campo Magro e deságua no Rio Iguaçu, onde Reservatório do Rio Verde encontra-se nesse percurso. O clima é subtropical úmido mesotérmico com temperatura média anual entre 16,5°C a 22,6°C, e precipitações médias anuais de 1450 mm (CUNHA, 2011, p. 64).

O Reservatório do Rio Verde situa-se na latitude 25°31'S e longitude 49°31'W, e foi construído entre 1974 e 1976 pela Petróleo Brasileira S.A. (Petrobras), com a finalidade inicial de atender à refinaria Presidente Getúlio Vargas. Atualmente, existem outorgas de retirada de água para fins agrícolas, e futuramente projetos de captação de água bruta para abastecimento público pela Companhia de Saneamento do Paraná (SANEPAR) (CUNHA, 2011, p. 50). A Tabela 5 resume alguns dados gerais do Reservatório do Verde.

Tabela 6 – Valores médios, mínimos e máximos mensais da radiação solar e da temperatura do ar (2010).

Mês	Radiação Solar(Wm <sup>-2</sup> )			Temperatura do ar (°C)		
	Média	Mínima	Máxima	Média	Mínima	Máxima
Janeiro	199	–	1442	21	16	29
Fevereiro	222	–	1249	22	15	33
Março	196	–	1191	20	13	29
Abril	163	–	1040	17	9	29
Mai	117	–	879	15	6	25
Junho	139	–	869	13	4	25
Julho	133	–	817	15	3	25
Agosto	172	–	979	13	4	29
Setembro	182	–	1169	16	6	28
Outubro	204	–	1224	15	9	28
Novembro	256	–	1277	18	8	30
Dezembro	202	–	1299	20	10	30

Uma expressão da área como função da profundidade foi derivada para ser usada em cálculos futuros e é dada pela Eq. (4.30), onde os coeficiente do polinômio são:  $p_1 = -2,4698694141577351e-01$ ,  $p_2 = 1,4638527837718170e+01$ ,  $p_3 = -3,5049853411183437e+02$ ,  $p_4 = 4,2951922602212580e+03$ ,  $p_5 = -2,7580529385983689e+04$ ,  $p_6 = 7,9555411744600642e+04$ ,  $p_7 = -1,0271477239204156e+04$ ,  $p_8 = -9,1808740113693359e+05$  e  $p_9 = 6,5189134193465970e+06$ .

$$A(z) = p_1z^8 + p_2z^7 + p_3z^6 + p_4z^5 + p_5z^4 + p_6z^3 + p_7z^2 + p_8z + p_9 \quad (4.30)$$

## 4.5 SÉRIE DE DADOS METEOROLÓGICOS

Os dados meteorológicos foram obtidos a partir de uma estação instalada no Reservatório do Rio Verde localizada próxima a barragem e sobre uma laje localizada na tomada d'água (Localização da estação: Latitude 25°31'36,83"S e Longitude 49°31'39,07"W). As variáveis meteorológicas como a radiação solar incidente, a temperatura do ar, a umidade relativa, a velocidade do vento e a precipitação foram obtidas a cada 15 minutos e os sensores estavam localizados a aproximadamente 10 metros de altura da superfície da água. O período de medição foi de julho de 2008 a dezembro de 2010.

Os valores médios, mínimos e máximos mensais dos dados meteorológicos de 2010 são mostrados na Tabela 6 e 7.

Os perfis de temperatura foram medidos na região de maior profundidade do reservatório (cerca de 10 metros). As medições foram realizadas uma vez ao mês nos períodos de julho de 2008 a julho de 2009 e de março a dezembro de 2010. A Figura 3



Tabela 7 – Valores médios, mínimos e máximos mensais da umidade relativa e da velocidade do vento (2010).

Mês	Umidade Relativa (%)			Velocidade do Vento ( $\text{ms}^{-1}$ )		
	Média	Mínima	Máxima	Média	Mínima	Máxima
Janeiro	85	53	97	2,61	0,11	9,00
Fevereiro	82	35	97	2,54	$3,10 \times 10^{-2}$	7,53
Março	83	37	98	2,51	0,00	8,06
Abril	84	28	99	2,39	$6,00 \times 10^{-3}$	9,74
Mai	87	45	99	2,45	0,00	8,01
Junho	85	33	99	2,50	$6,00 \times 10^{-3}$	8,56
Julho	85	43	99	2,69	0,00	7,72
Agosto	80	21	99	2,84	0,00	8,11
Setembro	79	24	99	3,34	0,00	10,13
Outubro	80	28	99	3,37	$5,00 \times 10^{-3}$	7,84
Novembro	77	25	99	3,04	$1,09 \times 10^{-2}$	11,89
Dezembro	84	41	98	2,89	$7,09 \times 10^{-2}$	9,77

mostra os perfis de temperatura medidos para o ano de 2010.

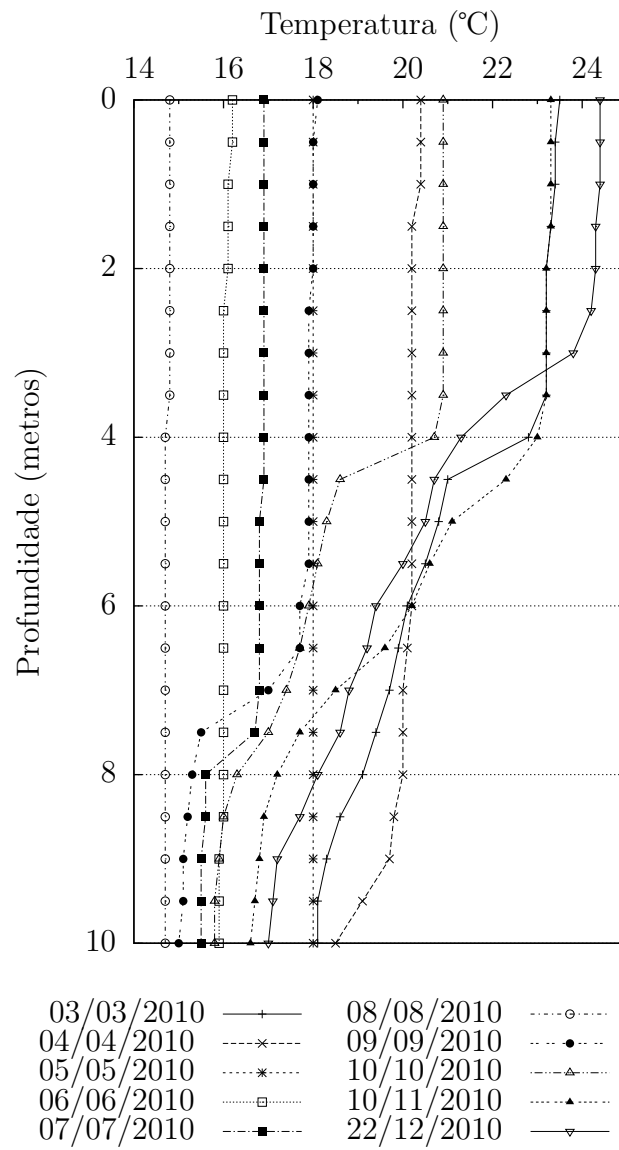


Figura 3 – Perfis de temperatura medidos em 2010.

## 5 RESULTADOS

A apresentação e as análises dos resultados estão divididas em 5 casos. As principais alterações estão nas diferentes formas de aplicação da condição de contorno na superfície da água e na parametrização do coeficiente de difusão turbulenta.

O Caso 1 trata da aplicação da equação da transferência de calor no qual são considerados diferentes formas de absorção da radiação solar pelo corpo d'água e é suposto um coeficiente de difusão constante. É considerado apenas o aquecimento.

No Caso 2, uma situação de aquecimento é assumida. A principal consideração é supor que o coeficiente de difusão turbulenta é função da velocidade do vento adjacente à superfície da água e de gradientes de temperatura estáveis ou neutros. Diferentes maneiras de absorção da radiação continuam sendo aplicadas para o corpo d'água.

Para o Caso 3, supõe-se uma sazonalidade idealizada para a temperatura de equilíbrio. Isto significa que em determinados períodos do ano o corpo d'água ganha energia e em outros perde energia. Quando a temperatura de equilíbrio é maior que a temperatura da superfície da água, o corpo d'água ganha energia e quando a temperatura de equilíbrio é menor que a temperatura da superfície, perde energia. O coeficiente de difusão turbulenta continua sendo parametrizado como função da velocidade do vento e de gradientes de temperatura estáveis ou neutros.

O modelo de estratificação térmica é aplicado para o Reservatório do Rio Verde no Caso 4. A temperatura de equilíbrio é estimada a partir das médias mensais dos dados meteorológicos obtidos no reservatório de junho de 2009 a dezembro de 2010. A troca de calor na interface ar-água é o principal fator que altera o regime térmico do reservatório. É suposto que o principal mecanismo de geração de turbulência no reservatório é dado pela ação do vento.

No Caso 5, o coeficiente de troca de calor é estimado a partir da temperatura da superfície da água e da velocidade do vento. Diferentemente do Caso 4, onde o coeficiente de troca de calor é usado constante.

### 5.1 SIMULAÇÃO: CASO 1

A formulação matemática para simular o regime térmico de lagos e reservatórios é dada pela equação da transferência de calor unidimensional na direção vertical. Os resultados apresentados no Caso 1 estão limitados em considerar que:

- (1) O fluxo de calor na superfície da água foi considerado constante. Assim, a

radiação solar incidente na superfície da água é constante. Tal suposição é válida quando tem-se experimentos controlados em laboratório (Exemplo [Dake e Harleman \(1969\)](#)). Uma certa fração da radiação solar incidente ( $H_0$ ) é refletida pela superfície da água devido ao albedo da água ( $\alpha_W$ ). A energia restante pode ser totalmente absorvida pela superfície da água ( $\beta = 1$ ), parcialmente ( $0 < \beta < 1$ ) ou ainda nenhuma fração de energia pode ser absorvida na superfície ( $\beta = 0$ ).

(2) O coeficiente de difusão molecular,  $K_M$ , foi considerado constante. Para o caso de fluidos, essa suposição pode ser considerada válida quando as camadas superiores estão mais aquecidas que as camadas inferiores. Isto caracteriza uma situação de estratificação estável, onde camadas de fluidos menos densas se encontram acima de camadas de fluidos mais densas. Com isso, o único mecanismo de transferência de calor é dado pela difusão molecular para o calor na água. Porém, quando existem forçantes que aumentam a difusão na água, como por exemplo a velocidade do vento acima da superfície da água, a difusão molecular é pequena comparada com a difusão turbulenta para o calor na água. Portanto, a difusão turbulenta,  $K_H$ , rege a transferência de calor na água. Para um caso idealizado em que a velocidade do vento é considerada igual a zero e para uma situação estável, apenas a difusão molecular do calor foi considerada.

(3) A densidade da água foi suposta constante por se considerar que o intervalo de temperatura do corpo d'água varia levemente. Porém, quando trata-se de efeitos de instabilidade entre camadas d'água, os perfis de temperatura devem ser corrigidos imediatamente de tal maneira que a energia do sistema seja conservada.

Embora o Caso 1 seja simples em vários aspectos, ele serve para ilustrar a forma que a radiação solar é absorvida pelo corpo d'água e a aplicação e obtenção da solução numérica pelo MDF, esquema de Cranck-Nicolson. Assim, o conjunto de equações usadas na simulação pode ser visto abaixo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_M \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_W c} \frac{\partial H_s(z)}{\partial z}, \quad \text{para } 0 < z < H; \quad t > 0; \quad (5.1)$$

$$H_s(z) = (1 - \beta)H_0(1 - \alpha_W) \exp(-\eta z) \quad \text{para } 0 < z < H, \quad (5.2)$$

onde  $\eta = 1,7/d$ ;

$$\rho_W c (K_M + K_H) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -H_n = -\beta H_0 (1 - \alpha_W); \quad (5.3)$$

$$\rho_W c (K_M + K_H) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \quad (5.4)$$

$$T(z) = T^0(z) \quad \text{em } t = 0. \quad (5.5)$$

O conjunto de equações governantes foi resolvido numericamente pelo Método de Diferenças Finitas, esquema de Crank-Nicolson. Considerando as suposições citadas acima, a discretização temporal e espacial da Eq. (5.1) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = & K_M \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{(\Delta z)^2} \right) + \\ & K_M \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{(\Delta z)^2} \right) + \frac{\eta(1-\beta)H_0(1-\alpha_W) \exp(-\eta z_i)}{\rho_W c}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

O índice superior  $j$  refere-se à malha usada no tempo ao passo que no índice inferior  $i$ , refere-se à malha espacial.

Algumas observações devem ser ressaltadas sobre a Eq. (5.6). Primeira, deseja-se resolver o problema no passo de tempo  $j + 1$ , ou seja, a condição no passo de tempo  $j$  é conhecida. Segundo, na discretização da equação governante, surgiram três incógnitas que são  $T_{i-1}^{j+1}$ ,  $T_i^{j+1}$  e  $T_{i+1}^{j+1}$ . Terceiro, ao optar pelo esquema de Crank-Nicolson, torna-se necessário conhecer  $K_M$  e  $H_0$  no passo de tempo  $j$  e  $j + 1$ . Porém, uma simplificação do modelo é supor que  $K_M$  não varia nem no espaço e nem no tempo ( $K_{M_i}^j = K_{M_i}^{j+1} = K_M$ ). Para a radiação solar incidente, supos-se que ela é constante no tempo, mas variável no espaço ( $H_{0_i}^j = H_{0_i}^{j+1} = H_{0_i}$ ).

Para se obter o número de equações igual ao número de incógnitas, as condições de contorno são utilizadas. Na discretização da condição de contorno na superfície, tem-se

$$\rho_W c K_M \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} = -\beta H_0 (1 - \alpha_W). \quad (5.7)$$

Supondo que o número de pontos na malha espacial seja  $m$ . A discretização da condição de contorno no fundo é dada por

$$\rho_W c K_M \frac{T_m^{j+1} - T_{m-1}^{j+1}}{\Delta z} = 0. \quad (5.8)$$

O sistema de equações lineares pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T_{i-1}^{j+1} - T_i^{j+1} &= \frac{\beta H_0 (1 - \alpha_W)}{\rho_W c K_M} \Delta z \\ -K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_{i-1}^{j+1} + \left( 1 + K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) T_i^{j+1} - K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_{i+1}^{j+1} &= r_i \\ -K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_i^{j+1} + \left( 1 + K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) T_{i+1}^{j+1} - K_M \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} T_{i+2}^{j+1} &= r_{i+1} \\ &\vdots \\ -T_{m-1}^{j+1} + T_m^{j+1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$



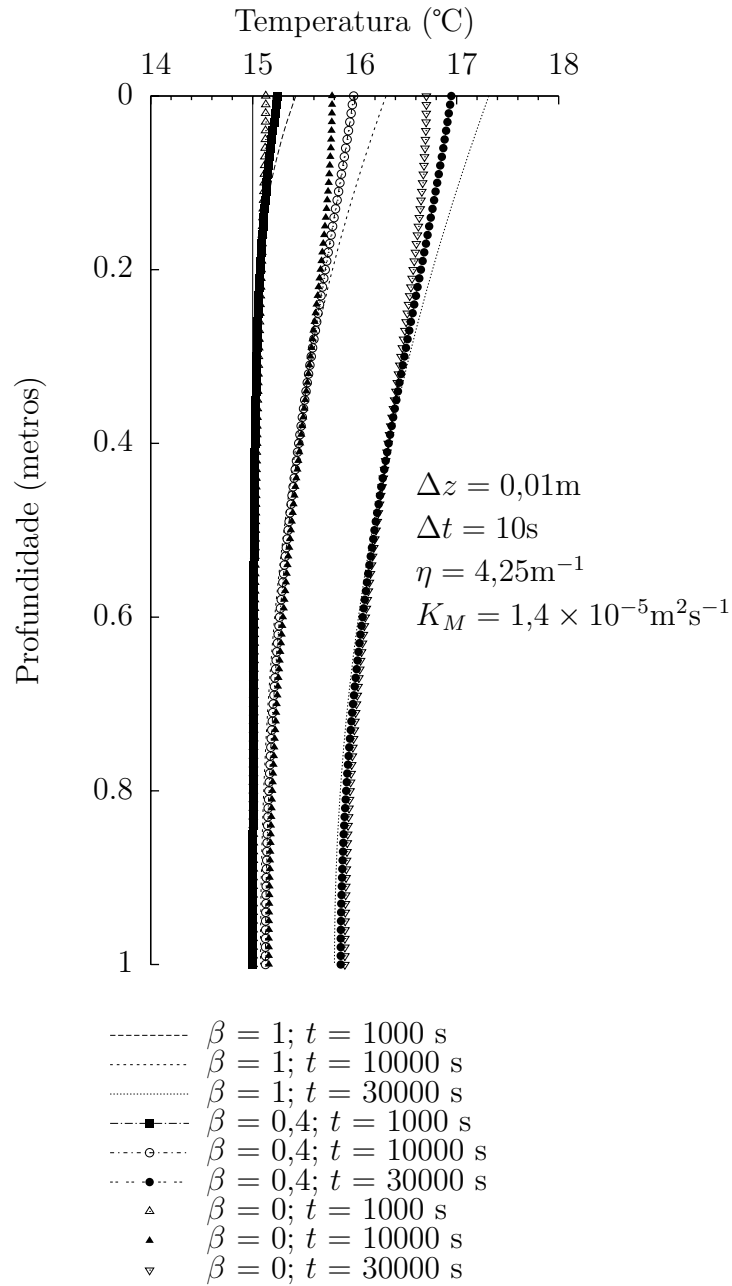


Figura 4 – Perfis de temperatura simulados considerando diferentes valores para  $\beta$  – Caso 1.

ser atenuado quando  $\beta < 1$ . De acordo com [Dake e Harleman \(1969\)](#), experimentos laboratoriais mostraram que a superfície da água absorve 0,4 da radiação solar disponível.

Segundo [Henderson-Sellers \(1984b\)](#), é comum se supor um certo valor para  $\beta$  em lagos. Isto é observado empiricamente devido a diferentes comportamentos de absorção da radiação solar próxima à superfície.

### 5.1.1 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 1

As considerações físicas de como o corpo d'água absorve a radiação solar incidente resultam em diferentes comportamentos dos perfis de temperatura simulados próximo à superfície da água. É importante mencionar que a absorção da radiação solar está relacionada à qualidade da água em termos de turbidez e expressa no coeficiente de extinção.

Uma análise importante e possível seria validar a solução numérica com a solução analítica obtida da equação diferencial. Sem essa segunda análise apenas pode-se esperar observações qualitativas dos resultados obtidos numericamente. Portanto, não se consegue dizer se num tempo futuro a solução numérica evoluirá exatamente para as soluções obtidas aqui.

O Método de Diferenças Finitas respondeu de forma relevante as alterações feitas na condição de contorno superficial. Sendo o MDF largamente utilizado na literatura para resolver numericamente a equação da transferência de calor unidimensional transiente.

Pode-se dizer que a maior limitação do Caso 1 é a desconsideração do coeficiente de difusão turbulenta. Na realidade, o corpo d'água está sujeito a ação de forçantes externos, como por exemplo a velocidade do vento que gera turbulência nas camadas d'água superiores. Isto provoca distribuições de temperatura diferentes das observadas no Caso 1.

## 5.2 SIMULAÇÃO: CASO 2

O Caso 2 foca na parametrização do coeficiente de difusão turbulenta. Na estratificação em particular, muitas vezes, nota-se que o corpo d'água apresenta uma camada superior mais ou menos bem misturada (epilímnio); uma região intermediária de elevado gradiente de temperatura (metalímnio); e uma camada mais profunda praticamente misturada com temperaturas menores (hipolímnio).

Teoricamente, o epilímnio surge devido a forçantes externos como, por exemplo, a velocidade do vento adjacente à superfície da água, aumentando a difusão do calor na água. Outro mecanismo de formação do epilímnio é dado por situações de instabilidade. Sob estas condições, uma camada superior isotermal é gerada.

Assim, deseja-se simular uma situação de aquecimento de um corpo d'água através de um fluxo de calor constante na superfície. Além disso, uma parametrização adequada para o coeficiente de difusão turbulenta,  $K_H$ , deve ser suposta de tal forma que os perfis de temperatura apresentem uma camada superior mais ou menos bem misturada (epilímnio).

A principal dificuldade da aplicação da equação da transferência de calor é estimar o coeficiente de difusão turbulenta,  $K_H$ . De acordo com [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#), o



principal mecanismo pelo qual a turbulência é gerada nas camadas superiores de um corpo d'água é a ação do vento na superfície da água. Além disso, gradientes de temperatura são gerados pela troca de calor entre o ambiente e o corpo d'água. Quando o gradiente de temperatura é muito estável, a geração de turbulência induzida pelo vento é suprimida. Por outro lado, quando o gradiente de temperatura é instável, ele aumenta a geração de turbulência pelo vento.

O coeficiente de difusão turbulenta é dado por um coeficiente de difusão turbulenta para o estado neutro,  $K_{H0}$ , multiplicado a uma função de estabilidade com um parâmetro que caracteriza a estratificação, normalmente, expressa pelo número de Richardson (Munk e Anderson (1948) citado por Sundaram e Rehm (1971b)). Rossby e Montgomery (1935) citado por Sundaram e Rehm (1971b) estimaram a difusão turbulenta a partir da expressão

$$K_H = K_{H0} \frac{1}{(1 + \sigma_1 R_i)^p}. \quad (5.12)$$

O número de Richardson pode ser escrito como

$$R_i = g \frac{\partial \rho / \partial z}{\rho (\partial u / \partial z)^2} = -g \frac{\alpha_v \partial T / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2}. \quad (5.13)$$

Walters, Carey e Winter (1978) estimaram o cisalhamento da velocidade,  $\partial u / \partial z$ , a partir da *Teoria da Camada Limite*. Logo, o cisalhamento da velocidade foi suposto como

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}. \quad (5.14)$$

onde,  $u_*$  é a velocidade de atrito,  $k$  é a constante de von Kármán e  $z$  é a posição vertical do ponto a partir da superfície do corpo d'água.

Na prática, a velocidade de atrito é estimada como

$$u_* = \left( \frac{\tau_s}{\rho_W} \right)^{1/2}. \quad (5.15)$$

A tensão de atrito superficial ( $\tau_s$ ) causada pela velocidade do vento adjacente à superfície da água pode ser estimada a partir da velocidade do vento (Taylor (1916) citado por Garratt (1977)). Assim, tem-se

$$\tau_s = \rho_{ar} C_D U^2. \quad (5.16)$$

Substituindo a Eq. (5.14) na Eq. (5.13), o número de Richardson é definido da seguinte forma

$$R_i = -\frac{g\alpha_v k^2 z^2}{u_*^2} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (5.17)$$

Sundaram e Rehm (1973) supuseram que o coeficiente de difusão turbulenta para o estado neutro, ou seja, na ausência de estratificação é dado por

$$K_{H_0} = c_1 u_*, \quad (5.18)$$

onde  $c_1$  é uma constante apropriada.

A discretização temporal e espacial da equação governante e das condições de contorno pelo método de diferenças finitas esquema de Crank-Nicolson é apresentada abaixo. Sendo

$$\begin{aligned} (T_i^{j+1} - T_i^j)\Delta z = & \\ \frac{1}{A_i} \frac{1}{2} \left[ A_{i+1/2}(K_M + K_{H_{i+1/2}}^{j+1}) \frac{(T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1})}{\Delta z} - A_{i-1/2}(K_M + K_{H_{i-1/2}}^{j+1}) \frac{(T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1})}{\Delta z} \right] \Delta t + & \\ \frac{1}{A_i} \frac{1}{2} \left[ A_{i+1/2}(K_M + K_{H_{i+1/2}}^j) \frac{(T_{i+1}^j - T_i^j)}{\Delta z} - A_{i-1/2}(K_M + K_{H_{i-1/2}}^j) \frac{(T_i^j - T_{i-1}^j)}{\Delta z} \right] \Delta t + & \\ - \frac{(1 - \beta)H_0(1 - \alpha_W) \exp(-\eta z_i)}{\rho_W c A_i} \frac{\partial A_i}{\partial z} \Delta t + \frac{\eta(1 - \beta)H_0(1 - \alpha_W) \exp(-\eta z_i)}{\rho_W c} \Delta t; & \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$\rho_W c (K_M + K_{H_{i-1/2}}^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta z} = -\beta H_0 (1 - \alpha_W); \quad (5.20)$$

$$\rho_W c (K_M + K_{H_{m-1/2}}^{j+1}) \frac{T_m^{j+1} - T_{m-1}^{j+1}}{\Delta z} = 0. \quad (5.21)$$

Os parâmetros físicos e as constantes apropriadas do modelo são apresentadas na Tabela 9. Visando já aplicação de um modelo de distribuição de temperatura vertical no Reservatório do Rio Verde, algumas variáveis meteorológicas e a geometria do reservatório são inseridas no problema. Observe que a radiação solar incidente ( $H_0$ ), a velocidade do vento ( $U$ ), a profundidade máxima ( $H$ ), a profundidade do disco de Secchi ( $d$ ) e a área com função da profundidade  $A(z)$  são informações obtidas do reservatório para o ano de 2010. Na condição inicial, foi utilizada uma situação isotermal ( $T^0(z) = 15^\circ\text{C}$ ) do perfil de agosto de 2010, sendo o menor perfil de temperatura observado.

De acordo com Sundaram e Rehm (1971b), o coeficiente de difusão turbulenta descrito pela Eq. (5.12) é suposto válido para todo o corpo d'água e enquanto houver

Tabela 9 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 2.

Parâmetros	Valores Utilizados	Unidades	Fonte
$0 \leq t \leq t_f$	$t_f = 10$ dias	s	autor
$\Delta z$	0,01	m	autor
$\Delta t$	10	s	autor
$\rho_W$	1000	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$\rho_{ar}$	1,2	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$\sigma_1$	0,04	adimensional	autor
$g$	9,81	$\text{ms}^{-2}$	–
$0 \leq z \leq H$	$H = 10$	m	Dado do Reserv. do Rio Verde
$U$	2,76	$\text{ms}^{-1}$	Dado do Reserv. do Rio Verde
$H_0$	180	$\text{Wm}^{-2}$	Dado do Reserv. do Rio Verde
$T^0(z)$	15	$^{\circ}\text{C}$	Dado do Reserv. do Rio Verde
$d$	1,55	m	Dado do Reserv. do Rio Verde
$c$	4200	$\text{Jkg}^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$\alpha_W$	0,1	adimensional	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$K_M$	$1,4 \times 10^{-7}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$c_1$	$2,82 \times 10^{-2}$	m	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$p$	1	adimensional	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$k$	0,41	adimensional	<a href="#">Garratt (1977)</a>
$\alpha_v$	$2 \times 10^{-4}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">James (1977)</a>
$C_D$	$2,6 \times 10^{-3}$	adimensional	<a href="#">Walters, Carey e Winter (1978)</a>

baixos gradientes de temperatura. Quando o mínimo valor de  $K_H$  tornar-se igual ou menor que um valor de difusão turbulenta mínimo especificado, supõe-se que, neste instante, a fórmula do  $K_H$  não é válida abaixo desse valor mínimo especificado. Portanto, a difusão turbulenta é válida até ao valor mínimo especificado e abaixo é suposto um  $K_H$  constante e igual ao valor mínimo. Esse procedimento é realizado para caracterizar o *início* de uma forte estratificação térmica, onde a difusão turbulenta tem uma atuação limitada apenas nas primeiras camadas de água.

Matematicamente, o coeficiente de difusão turbulenta sugerido para o Caso 2 pode ser escrito como

Se  $K_H \leq K_{H_{\text{esp}}}$ :

$$K_H = \begin{cases} c_1 u_* f(R_i); & 0 \leq z \leq z_{cr} \\ K_{H_{\text{min}}}; & z_{cr} > H \end{cases} \quad (5.22)$$

Senão  $K_H > K_{H_{\text{esp}}}$ :

$$K_H = c_1 u_* f(R_i); \quad 0 \leq z \leq H \quad (5.23)$$

onde  $K_{H_{\text{esp}}}$  é o coeficiente de difusão turbulenta mínimo especificado empiricamente que caracteriza uma forte estratificação,  $z_{cr}$  é a profundidade crítica onde ocorre  $K_{H_{\text{esp}}}$  e até onde será aplicado o coeficiente de difusão turbulenta e  $K_{H_{\text{min}}}$  é o coeficiente de difusão turbulenta mínimo e constante utilizado de forma empírica abaixo da profundidade crítica.

Para o Caso 2, o valor mínimo especificado utilizado para  $K_{H_{esp}}$  foi de  $5,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e abaixo foi usado um valor constante igual a  $1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  para  $K_{H_{min}}$ . Estes dois valores foram ajustados para que a termoclina surgisse entre 3 e 4 metros como observado no Reservatório do Rio Verde nos perfis medidos em 2010.

As soluções numéricas obtidas a partir de diferentes valores utilizados para  $\beta$  são ilustradas na Figura 5. A discussão do Caso 2, pode ser dividida em duas partes:

(1) A suposição de que a energia incidente pode ser absorvida de diferentes formas pelo corpo d'água. Matematicamente, a energia incidente pode ser absorvida totalmente pela superfície da água ou pode aquecer o corpo d'água supondo que toda a energia incidente penetra na na coluna d'água ou ainda supor que uma parte é absorvida pela superfície e o restante penetra na coluna d'água. A solução numérica foi capaz de resolver todos os casos para uma situação de aquecimento sem proporcionar grandes diferenças nos perfis de temperatura (ver novamente Figura 5). Diferentemente do Caso 1, os perfis de temperatura não mostraram grandes diferenças próximo à superfície da água devido ao elevado valor do coeficiente de difusão turbulenta considerado que foi grande o suficiente para produzir baixos gradientes de temperatura e tirar o efeito das diferentes formas de absorção da radiação pelo corpo d'água próximo a superfície. Em outras palavras, isto significa que o fluxo de calor é facilmente transferido das camadas superiores para as camadas mais baixas devido a mistura provocada pelo vento.

(2) Um apropriado coeficiente de difusão turbulenta foi utilizado. De acordo com os trabalhos revisados, parece adequado supor que o coeficiente de difusão turbulenta para modelos de evolução térmica unidimensionais na vertical podem ser estimados a partir de um coeficiente de difusão turbulenta para o estado neutro multiplicado pela função de estabilidade com um parâmetro que caracteriza a estratificação. Outra característica desse tipo de modelo é supor que toda turbulência é gerada pela velocidade do vento. Essencialmente, a ação do vento é capaz de desfazer gradientes de temperatura estáveis que surgem devido à radiação solar incidente na superfície da água. Surge, então, uma camada mais ou menos bem misturada próximo à superfície. Abaixo desta camada, a ação da velocidade do vento não é tão efetiva e um elevado gradiente de temperatura é formado devido à baixa difusão do calor. O hipolímnio é caracterizado por uma camada praticamente isotermal e com temperaturas mais baixas. Assim, a parametrização utilizada para a difusão turbulenta foi capaz de reproduzir boa parte dessas características relacionada à uma situação de aquecimento de um corpo d'água (Figura 5).

Na Figura 6, o coeficiente de difusão turbulenta é mostrado para o caso em que  $\beta = 1$ . Observa-se que após 3 dias de simulação, o  $K_H$  dado pela Eq. (5.12) não atingiu o valor mínimo especificado ( $K_{H_{esp}}$ ) e por isso, continua sendo aplicado ao longo de toda a coluna d'água. Após atingir o valor de difusão turbulenta mínimo especificado, o  $K_H$  é modificado causando uma forte descontinuidade (Curvas:  $t = 20$  dias e  $t = 30$  dias).

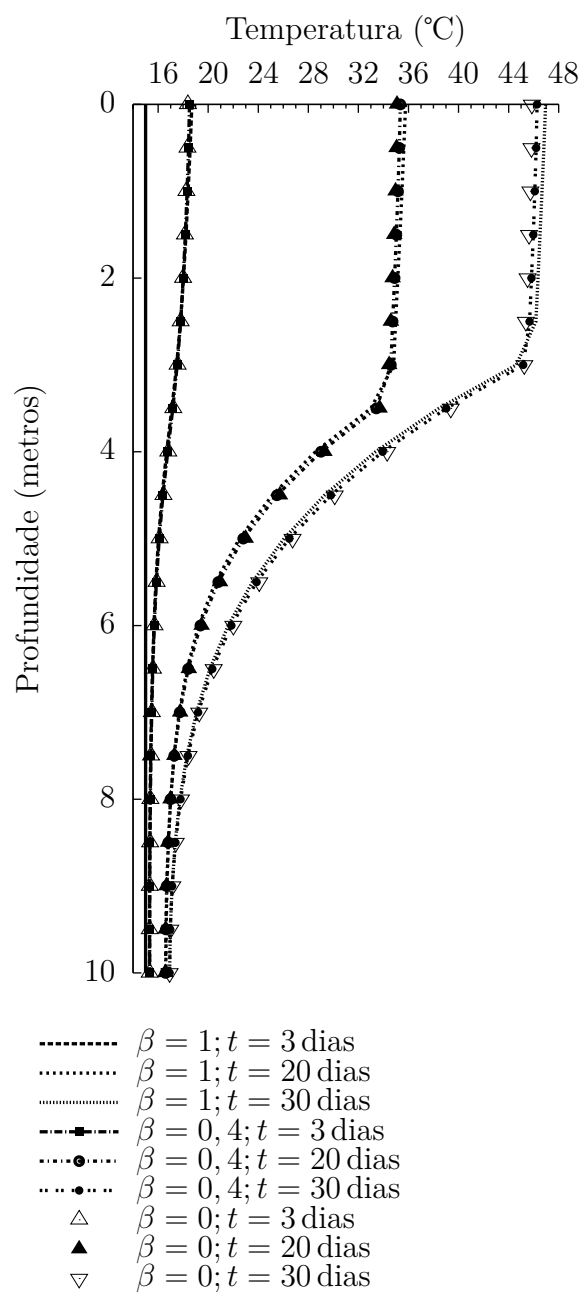
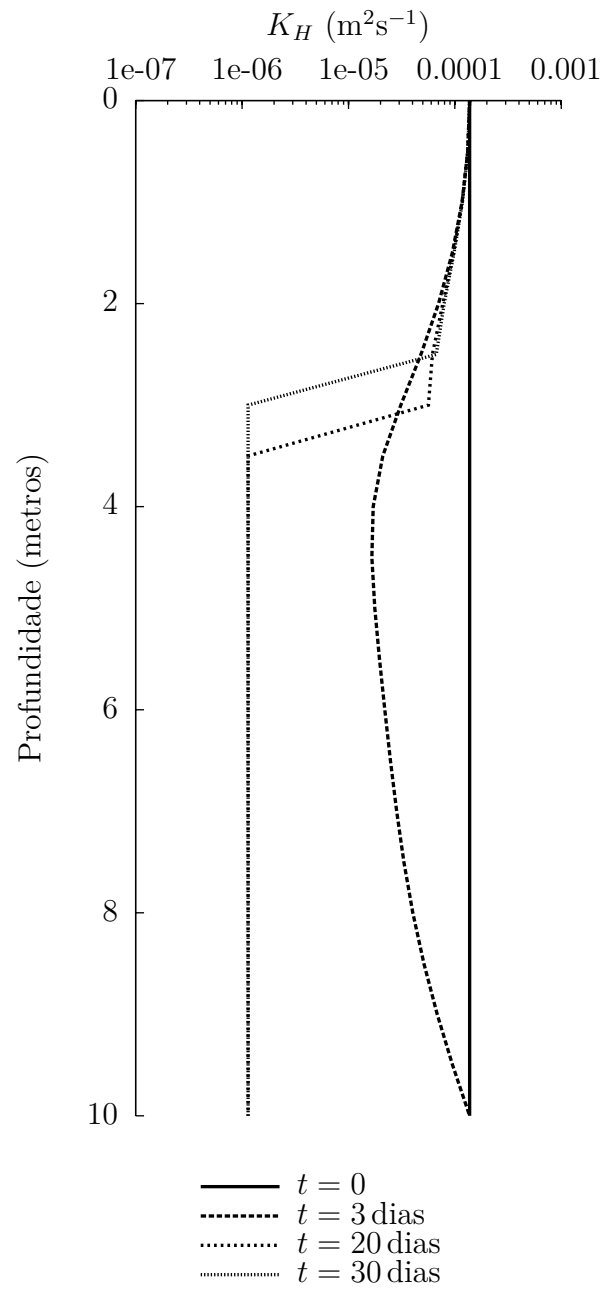


Figura 5 – Perfis de temperatura simulados considerando diferentes valores para  $\beta$  – Caso 2.

Figura 6 – Perfis do coeficiente de difusão turbulenta,  $\beta = 1$  – Caso 2.

### 5.2.1 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 2

Neste Caso 2, um fluxo de calor constante foi imposto na superfície e a condição inicial parte de uma situação isothermal, com a termoclina se formando após um certo período de simulação. A solução numérica indica que a termoclina sobe com o passar do tempo.

Pouca diferença nos perfis de temperatura próximo à superfície da água pode ser notado a partir de diferentes suposições de absorção da radiação solar. Isto porque a turbulência introduzida no problema é a que comanda a transferência de calor nas camadas superficiais, provocando baixos gradientes de temperatura.

A parametrização do coeficiente de difusão turbulenta tem por finalidade permitir uma transferência de calor adequada para um regime térmico observado em lagos e reservatórios, por exemplo. O coeficiente de difusão turbulenta foi capaz de representar de forma *qualitativa* a estrutura térmico de um corpo d'água em uma situação de aquecimento. A turbulência induzida pelo vento promove o surgimento de uma camada superior praticamente uniforme.

Vale a pena ressaltar que muitos trabalhos revisados na literatura apresentam o coeficiente de difusão turbulenta válido somente para uma situação de aquecimento. Além disso, parece ser necessário que o  $K_H$  deva ser modificado de alguma forma após atingir um determinado valor. Isto é justificado porque a difusão turbulenta é efetiva apenas nas camadas superiores do corpo d'água devido a ação do vento. Portanto, a modelagem do coeficiente de difusão turbulenta apresentada permitiu reproduzir uma suposta situação de aquecimento de um corpo d'água.

Uma importante observação mencionada por [Dake e Harleman \(1969\)](#) é artificialidade do coeficiente de difusão turbulenta ser capaz de produzir mistura. Conseqüentemente, nota-se que ele é alterado (na sua forma funcional) e modificado (em relação à calibração) em diferentes trabalhos para concordar com os perfis de temperatura medidos. Por isso, mesmo não sendo feita nenhuma comparação com medições, dois exemplos práticos observados no Caso 2 de modificações no coeficiente de difusão turbulenta foram: (1) a modificação feita em  $\sigma_1$  que não foi retirado de nenhuma literatura, comparado com [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#) ( $\sigma_1 = 0,1$ ) foi usado um valor menor e comparado com [Walters, Carey e Winter \(1978\)](#) ( $\sigma_1 = 0,048$ ) foi utilizado um valor mais próximo; (2) para a termoclina surgir em torno de 3 a 4 metros, foi necessário ajustar o valor mínimo de  $K_H$  que caracteriza o início de uma forte estratificação e não permite o coeficiente de difusão turbulenta atue ao longo de toda a profundidade.

### 5.3 SIMULAÇÃO: CASO 3

Para o Caso 3, a condição de contorno na superfície é formulada em termos do conceito da temperatura de equilíbrio. [Edinger, Duttweiler e Geyer \(1968\)](#) sugeriram que a troca de calor na interface ar-água pode ser considerada um dos mais importantes fatores que governam a temperatura do corpo d'água. O balanço de energia total,  $H_n$ , na superfície da água pode ser dada pela radiação solar de onda curta incidente, pela perda de energia por evaporação e perda ou ganho de energia por condução de calor entre a água e o ar. Os autores sugeriram que o balanço de energia total pode ser definido como

$$H_n = K(T_e - T_s). \quad (5.24)$$

A temperatura de equilíbrio,  $T_e$ , é definida como uma temperatura fictícia da superfície da água no qual o balanço de energia,  $H_n$ , é igual a zero. O coeficiente de troca de calor,  $K$ , é a taxa na qual a superfície da água responde a esses processos de troca de calor. O coeficiente de troca de calor é uma função da temperatura da superfície da água e da velocidade do vento.  $T_s$  é a temperatura da superfície da água.

De acordo com [Edinger \(1970\)](#), pode-se supor que a temperatura de equilíbrio varia de forma sazonal e pode ser expressa como

$$T_e(t) = \bar{T}_e - \delta T_e \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.25)$$

onde

$T_e(t)$  = a temperatura de equilíbrio em função do tempo, em °C;

$\bar{T}_e$  = o valor médio da temperatura de equilíbrio ao longo de um ciclo anual, em °C;

$\delta T_e$  = a amplitude média da variação anual da temperatura de equilíbrio, em °C;

$\omega$  = a frequência anual ou sazonal, em dia<sup>-1</sup>; e

$\alpha$  = a fase de defasagem, em radianos.

A frequência sazonal é dada como  $\omega = 2\pi/365$  dias. A fase de defasagem depende das condições nas quais as análises são iniciadas e pode ser escrita da seguinte forma

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{1}{1 + 2\beta_1 K / \rho_W c \omega} \right), \quad (5.26)$$

onde  $\beta_1$  representa uma taxa de decaimento da temperatura com a profundidade, em m<sup>-1</sup> (mais detalhes podem ser vistos em [Edinger \(1970\)](#)).



O valor de  $\beta_1$  para a condição inicial,  $t = 0$ , é dado por

$$\beta_1 = \left( \frac{\omega}{2D_v} \right)^{1/2} = \left( \frac{\omega}{2(K_M + K_H)} \right)^{1/2}, \quad (5.27)$$

onde  $D_v$  é a difusividade térmica, em  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ . Assim, a aproximação realizada para  $D_v$  foi dada pelo coeficiente de difusão molecular somado ao coeficiente de difusão turbulenta para o calor no início das análises ( $t = 0$ ).

Para uma análise espacial e temporal da temperatura no corpo d'água, o conjunto de equações abaixo é utilizada:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( A(K_M + K_H) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad \text{para } 0 < z < H; \quad t > 0; \quad (5.28)$$

$$K_H = K_{H_0} \frac{1}{(1 + \sigma_1 R_i)^p}; \quad (5.29)$$

$$K_{H_0} = c_1 u_*; \quad (5.30)$$

$$R_i = -\frac{g\alpha_v k^2 z^2}{u_*^2} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (5.31)$$

$$\rho_W c (K_M + K_H) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -H_n = -K(T_e - T); \quad (5.32)$$

$$\rho_W c (K_M + K_H) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (5.33)$$

Neste caso, um modelo simplificado foi suposto para realizar uma análise preliminar da variação sazonal da estrutura térmica de um corpo d'água. As temperaturas de equilíbrio mínima e máxima supostamente ocorrem em meados de junho e dezembro, respectivamente. A variação sazonal da temperatura de equilíbrio, Eq. (5.25), é dada por

$$T_e(t) = 20 - 10 \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.34)$$

Para a obtenção da solução numérica da equação da transferência de calor, algumas suposições são feitas: (1) A temperatura de equilíbrio deve ser conhecida ao longo de um ciclo sazonal; (2) O coeficiente de troca de calor foi considerado constante e conhecido; e (3) A velocidade do vento do ar foi considerada constante e conhecida. Porém, nada impede que seja uma função do tempo.

No caso estudado, supôs-se que a fração de absorção da radiação solar,  $\beta$ , é igual a 1. Isto significa que toda a radiação solar é absorvida na superfície da água. Contudo, é possível considerar que uma fração da radiação solar penetre na coluna d'água junto com o conceito de temperatura de equilíbrio apresentado. Mesmo assim, o termo fonte de calor interno foi desprezado no Caso 3 por dois motivos: (1) A temperatura de equilíbrio é supostamente conhecida e não foi derivada de um balanço de energia realista, onde se conhece a radiação solar. (2) A simulação do Caso 2 mostrou que a difusão turbulenta provoca uma mistura tão intensa que parece não importar como a radiação é absorvida pelo corpo d'água.

De acordo com [Sundaram e Rehm \(1973\)](#), no período de aquecimento, a temperatura de equilíbrio aumenta devido ao aumento da radiação solar. Assim, a temperatura de superfície da água também tende a aumentar, porém, mais lentamente. Por causa do acoplamento da temperatura da superfície com a transferência de calor dentro do corpo d'água, ela não responde somente a taxa de troca de calor com o ambiente, mas também ao fluxo no qual o calor é transferido para baixo devido à turbulência.

A Tabela 10 apresenta os principais parâmetros considerados na simulação. Novamente, a geometria (área variando com a profundidade e a profundidade máxima) e a velocidade do vento média para o ano de 2010 do Reservatório do Rio Verde foram usados nas análises. Outra vez, o Reservatório do Rio Verde é usado como referência na tentativa de deixar a modelagem mais realista possível e visando já como objetivo final deste trabalho a aplicação do modelo.

Os resultados de perfis de temperatura obtidos são apresentados na Figura 7. Os perfis de temperatura são mostrados como função da profundidade e variando aproximadamente ao longo de um ciclo anual. Nos primeiros 60 dias de simulação, nota-se uma situação de resfriamento. Isso ocorre porque o valor da temperatura de equilíbrio se encontra abaixo da temperatura da superfície da água. Quando a temperatura de equilíbrio é mais elevada que a temperatura da superfície da água, caracteriza-se uma situação de aquecimento. O aquecimento progressivo do corpo d'água é observado nos perfis do dia 180 e 240. Nesse período é observado uma camada superior com temperaturas em geral mais elevadas que o resto do corpo d'água (epilímnio). Abaixo desse região se desenvolve um elevado gradiente de temperatura (metalímnio) onde encontra-se a termoclina. A camada formada no fundo (hipolímnio) é caracterizada por temperaturas aproximadamente uniformes e as mais baixas observadas para o corpo d'água.

Após 240 dias de simulação, uma situação de resfriamento é novamente predominante. Espera-se que a região do metalímnio aprofunda-se no corpo d'água. Para o mecanismo de aprofundamento da termoclina, supõe-se que perfis instáveis de temperatura é o maior agente de mistura. Portanto, ao observar uma situação de instabilidade, uma correção do perfil de temperatura é realizada de forma instantânea. A correção é feita e

Tabela 10 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 3.

Parâmetros	Valores Utilizados	Unidades	Fonte
$0 \leq t \leq t_f$	$t_f = 545$ dias	s	autor
$\Delta z$	0,01	m	autor
$\Delta t$	10	s	autor
$\rho_w$	1000	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$K$	5	$\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^{-1}$	autor
$T^0(z)$	15	$^{\circ}\text{C}$	autor
$\rho_{ar}$	1,2	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$\sigma_1$	0,15	adimensional	autor
$\alpha$	$2,69 \times 10^{-2}$	radianos	–
$g$	9,81	$\text{ms}^{-2}$	–
$U$	2,76	$\text{ms}^{-1}$	Dado do Reserv. do Rio Verde
$0 \leq z \leq H$	$H = 10$	m	Dado do Reserv. do Rio Verde
$c$	4200	$\text{Jkg}^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$K_M$	$1,4 \times 10^{-7}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$c_1$	$2,82 \times 10^{-2}$	m	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$p$	1	adimensional	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$k$	0,41	adimensional	<a href="#">Garratt (1977)</a>
$\alpha_v$	$2 \times 10^{-4}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">James (1977)</a>
$C_D$	$2,6 \times 10^{-3}$	adimensional	<a href="#">Walters, Carey e Winter (1978)</a>

suposta ocorrer apenas nas camadas instáveis, sendo que o resto do perfil é mantido inalterado. Essa forma de correção de uma situação instável mostrou-se adequada e proporcionou um aprofundamento da termoclina.

A Figura 8 mostra os perfis do coeficiente de difusão turbulenta que geraram os perfis de temperatura da Figura 7. O coeficiente de difusão turbulenta dado pela Eq. (5.29) foi modificado após atingir um determinado valor. Este critério caracteriza uma situação de forte estratificação. Segundo [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#), quando o corpo d'água está desestratificado, a turbulência induzida pelo vento causa circulação em toda a coluna d'água. Porém, quando o corpo d'água está estratificado, a turbulência está mais confinada às camadas superiores. Portanto, para o Caso 3, o coeficiente difusão turbulenta mínimo especificado ( $K_{H_{\text{esp}}}$ ) foi determinado de forma empírica após atingir um valor menor ou igual a  $5,0 \times 10^{-6} \text{m}^2\text{s}^{-1}$ , sendo que abaixo da profundidade crítica ( $z_{cr}$ ), a difusão turbulenta mínima ( $K_{H_{\text{min}}}$ ) utilizada foi de  $1,5 \times 10^{-7} \text{m}^2\text{s}^{-1}$ . Outra vez, o coeficiente de difusão foi modificado e ajustado para que a termoclina surgisse entre 3 e 4 metros de profundidade.

De maneira a visualizar melhor os períodos de estratificação e desestratificação, a Figura 9 apresenta a temperatura de equilíbrio  $T_e$ , a temperatura da superfície da água  $T_s$  e a temperatura do fundo do corpo d'água  $T_m$ . A temperatura de equilíbrio foi suposta variar sazonalmente através de uma função cosseno. Os primeiros 60 dias simulados sugerem o fim de um período de resfriamento, onde a temperatura da superfície da água está

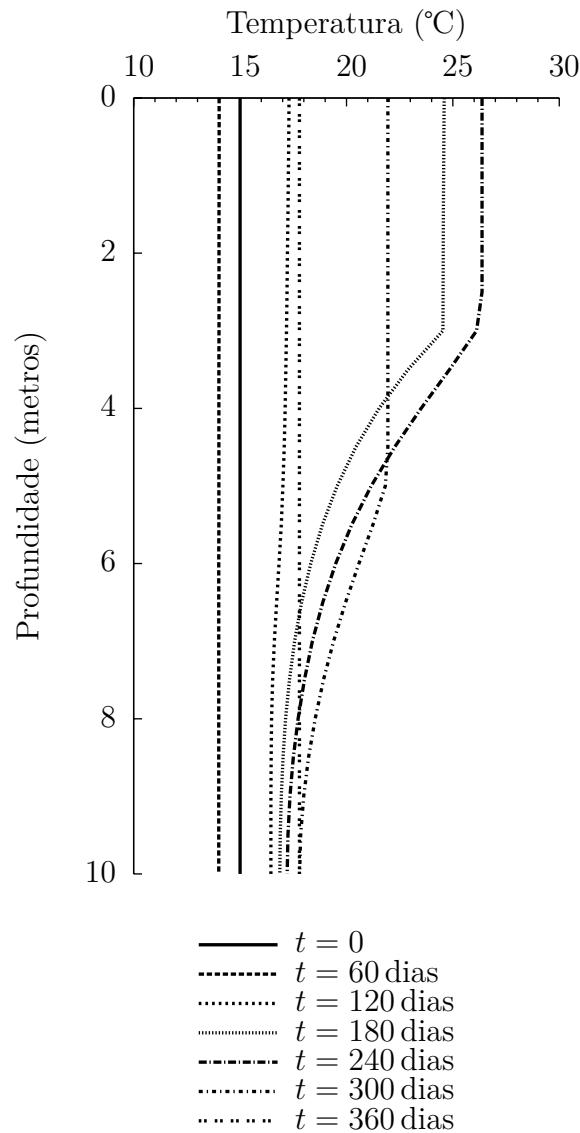


Figura 7 – Perfis de temperatura simulados – Caso 3.

caindo para seus valores mínimos. O período de aquecimento do corpo d'água é iniciado e aumenta progressivamente após 60 dias de simulação. Neste momento, a temperatura da superfície começa a aumentar rapidamente, aumentando também a temperatura do fundo d'água, porém, não na mesma velocidade. Conforme a temperatura de equilíbrio vai aumentando, as diferenças de temperatura da superfície e do fundo vão ficando cada vez mais elevadas. O valor máximo da diferença de temperatura ocorre em torno de 240 dias. Após 240 dias, as diferenças de temperatura vão diminuindo até o corpo d'água se uniformizar totalmente. Isto ocorre em torno de 330 dias. Então, o corpo d'água continua desestratificado até o próximo período de aquecimento.

A tendência cíclica da temperatura de equilíbrio faz com que após um ciclo, o perfil de temperatura do corpo d'água retorne à condição inicial. Porém, se a condição inicial não for escolhida apropriadamente, o equilíbrio pode não coincidir com o perfil de

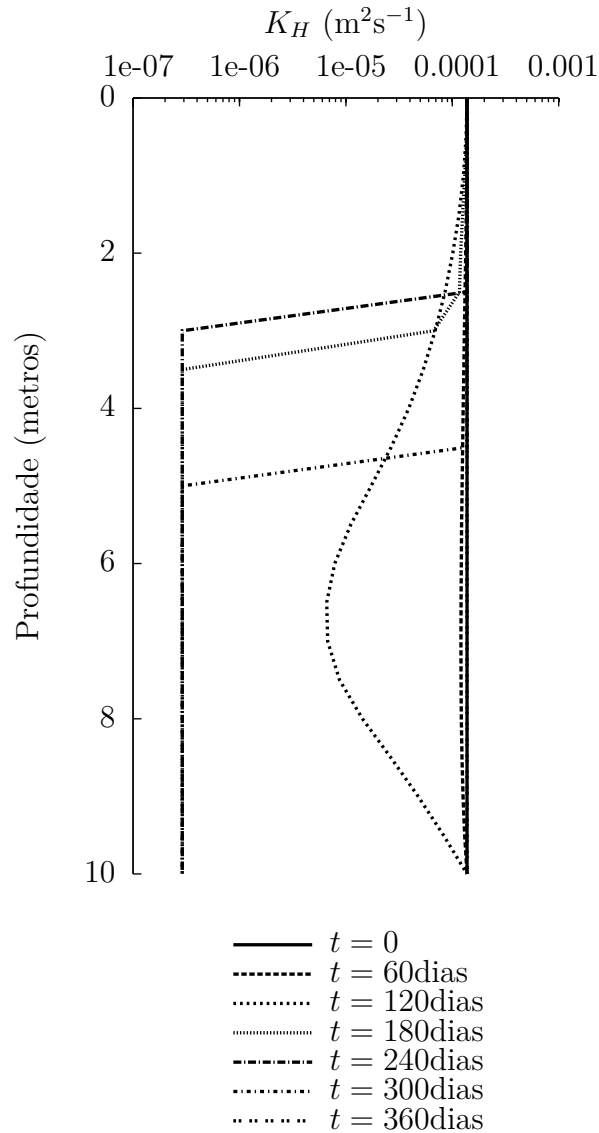


Figura 8 – Perfis de coeficiente de difusão turbulenta – Caso 3.

temperatura inicial.

Em períodos em que o corpo d'água está perdendo energia para o ambiente, uma mistura convectiva mais intensa ocorre nas camadas da água superiores. O motivo pelo qual isso ocorre é devido ao gradiente instável de densidade. Segundo [Sundaram e Rehm \(1973\)](#), em situações de instabilidade, pode-se supor que: (1) Quando a taxa de resfriamento é relativamente pequena, a turbulência é gerada principalmente pelo vento. Assim, a Eq. (5.29) ainda seria válida como mecanismo de geração de turbulência. (2) Quando a taxa de resfriamento é relativamente grande, a turbulência convectiva domina o mecanismo de mistura e a Eq. (5.29) torna-se inadequada. Uma adequada formulação para convecção livre teria que ser considerada. No entanto, como foi suposto neste trabalho, em situações de instabilidade, o perfil de temperatura é uniformizado imediatamente de tal forma a respeitar a conservação de energia como um critério de solução de situações de instabilidade.

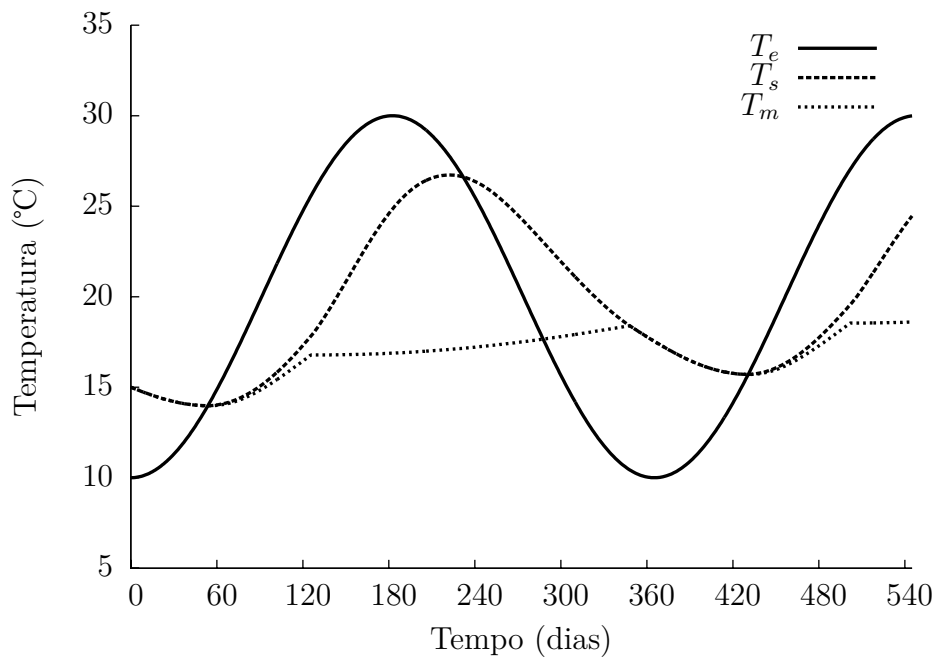


Figura 9 – Ciclo de estratificação simulado para o corpo d'água – Caso 3.

### 5.3.1 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 3

A suposição que o balanço de energia total na superfície do corpo d'água pode ser expressa por um coeficiente de troca de calor multiplicando a diferença da temperatura de equilíbrio e da temperatura da superfície da água foi satisfatória. A suposta sazonalidade expressa na temperatura de equilíbrio foi capaz de simular uma situação de aquecimento e de resfriamento do corpo d'água de forma prática.

O coeficiente de difusão turbulenta utilizado em situações de aquecimento permitiu o desenvolvimento de três regiões características na estratificação de corpos d'água, como o epilímnio, o metalímnio e o hipolímnio. Novamente, o coeficiente de difusão turbulenta foi modificado ao atingir um determinado valor mínimo.

Para situações instáveis, algumas considerações de correção do perfil de temperatura são realizadas na literatura, sendo o critério de conservação da energia uma alternativa. Assim, o critério de homogeneização do perfil de temperatura instável adotado neste trabalho parece ser adequado para o Caso 3. A temperatura da superfície da água apresentou um decaimento suave em situações instáveis ao longo do tempo.

Alguns parâmetros foram muito pouco explorados na simulação da evolução térmica do teórico corpo d'água. Contudo, esses parâmetros são de fundamental importância para a obtenção dos perfis de temperatura, tais como:  $K$ ,  $c_1$ ,  $\sigma_1$  e  $p$ . Por exemplo, a alteração no  $K$  produz resultados diferentes para a temperatura da superfície da água, resultando numa maior ou menor defasagem entre a temperatura da superfície da água e a temperatura de equilíbrio. Para obter diferentes profundidade da termoclina no modelo, notou-se que é

preciso alterar o valor de  $\sigma_1$ .

## 5.4 SIMULAÇÃO CASO 4

Segundo [Edinger, Duttiweller e Geyer \(1968\)](#), o balanço de energia total na superfície da água é a soma das taxas na qual o calor é transferido por processos radiativos, por evaporação e por condução entre a água e o ar sobreposto. Estes processos ocorrem principalmente na interface ar-água e pode ser escrito como

$$H_n = H_s + H_a + H_b + H_e + H_c. \quad (5.35)$$

Existem várias formulações para estimar cada componente do balanço de energia total ( $H_n$ ). Assim, as formulações foram escolhidas de tal forma a utilizar os dados meteorológicos medidos em campo, tais como: radiação solar de onda curta incidente; temperatura do ar; umidade relativa; e velocidade do vento medida a uma altura fixa.

A radiação solar de onda curta incidente na superfície da água de acordo com [Dake e Harleman \(1969\)](#) pode ser expressa da seguinte forma

$$H_s = \beta H_0(1 - \alpha_w) \quad \text{em } z = 0. \quad (5.36)$$

Supondo que uma fração dessa radiação é absorvida na superfície da água e a outra parte penetra no corpo d'água, tem-se

$$H_s = (1 - \beta)H_0(1 - \alpha_w) \exp(-\eta z) \quad \text{para } z > 0. \quad (5.37)$$

A radiação de onda longa emitida pela atmosfera (ver [Anderson \(1954\)](#)) pode ser estimada como segue

$$H_a = \varepsilon_a \sigma (T_a + 273)^4. \quad (5.38)$$

A maior dificuldade está em estimar a emissividade da atmosfera,  $\varepsilon_a$ . Em [Anderson \(1954\)](#), algumas formulações para estimar a emissividade da atmosfera a partir de um céu claro podem ser vistas. Porém, a expressão utilizada para estimar a emissividade da atmosfera a partir de um céu claro pode ser dada como ([Brutsaert \(1975\)](#) citado por [Livingstone e Imboden \(1989\)](#))

$$\varepsilon_a = 1,24 \left( \frac{e_a}{T_a} \right)^{1/7}, \quad (5.39)$$

onde  $e_a$  é a pressão de saturação de vapor à temperatura do ar, em hPa;  $T_a$  é a temperatura do ar, em K.

De acordo com Edinger, Duttiweller e Geyer (1968), a radiação de onda longa emitida pela superfície da água segue a lei de Stefan-Boltzmann

$$H_b = \varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^4, \quad (5.40)$$

onde  $\varepsilon_W$  é a emissividade da água;  $T_s$  é a temperatura da superfície da água.

Segundo Sweers (1976), a energia perdida por evaporação de um corpo d'água pode ser estimada a partir da expressão

$$H_e = f(U)(e_s - e_a), \quad (5.41)$$

onde  $f(U)$  é uma função da velocidade do vento;  $e_s$  é a pressão de saturação de vapor em relação à temperatura da superfície água; e  $e_a$  é a pressão de saturação de vapor em relação à temperatura do ar.

Vale a pena ressaltar que existe várias formulações para a função da velocidade do vento. Sweers (1976) fez uma revisão de literatura e sugeriu que a função de velocidade do vento determinada por McMillan em 1971 e 1973 foi a que apresentou melhores resultados para estimar evaporação de corpos d'água. De acordo o autor, a função da velocidade do vento depende da altura em que o vento é medido e deve ser corrigida através de uma relação da área do corpo d'água onde foi determinada a função com a área do corpo d'água onde será usada a função. Logo, pode-se dizer que a relação entre as áreas é:

$$R_{1,2} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{0,05} = \left(\frac{5 \times 10^6}{6 \times 10^6}\right)^{0,05} = 0,991, \quad (5.42)$$

onde  $A_2$  é a área superficial onde foi determinado  $f(U)$  e igual  $5 \times 10^6 \text{ m}^2$  (MacMillan); e  $A_1$  é a área superficial onde se deseja ajustar  $f(U)$  e aproximadamente igual a  $6 \times 10^6 \text{ m}^2$  (Reservatório do Rio Verde).

A velocidade do vento foi medida a 10 metros de altura e a função da velocidade do vento utilizada é dada como

$$f_2(U_{10}) = R_{1,2}(4,4 + 1,82C_3U_{10}), \quad (5.43)$$

onde  $C_3$  é uma constante tabelada a partir da altura de medição da velocidade do vento e igual a 1,00;  $R_{1,2}$  foi usado aproximadamente igual a 1,00. Logo,

$$f(U) = f_2(U_{10}) = 4,4 + 1,82U_{10}. \quad (5.44)$$



Bowen (1926) mostrou que a energia perdida por calor sensível e calor latente seguem a mesma lei. Assim, a relação de Bowen,  $R_B$ , pode ser escrita como

$$R_B = \frac{H_c}{H_e} = B \frac{(T_s - T_a)}{(e_s - e_d)}. \quad (5.45)$$

Substituindo a Eq. (5.41) na Eq. (5.45), o fluxo de calor sensível pode ser estimada da seguinte forma

$$H_c = Bf(U)(T_s - T_a), \quad (5.46)$$

onde B é a constante de Bowen.

Mais detalhes sobre cada componente do balanço de energia pode ser visto na Seção 3.2.

O objetivo é utilizar todos os componentes do balanço de energia na interface ar-água para encontrar uma suposta temperatura de equilíbrio a partir de medições meteorológicas. A partir da formulação proposta para os mecanismos de transferência de calor na interface ar-água, pode-se dizer que apenas três componentes são função da temperatura da superfície da água. Logo, tem-se

$$H_n = H_s + H_a + H_b(T_s) + H_e(T_s) + H_c(T_s). \quad (5.47)$$

Em Edinger, Duttiweller e Geyer (1968), é definido que a temperatura de equilíbrio,  $T_e$ , é uma suposta temperatura da superfície da água na qual o balanço de energia total seria igual zero. Logo,

$$0 = H_s + H_a + H_b(T_e) + H_e(T_e) + H_c(T_e). \quad (5.48)$$

A Eq. (5.48) é uma equação não linear em  $T_e$  resolvida numericamente pelo *Método de Newton-Raphson*.

No trabalho apresentado por Edinger, Duttiweller e Geyer (1968), após uma série de suposições e na tentativa de linearização da Eq. (5.47), os autores chegaram a conclusão que  $H_n$  pode ser linearizado e escrito da seguinte forma

$$H_n = K(T_e - T_s), \quad (5.49)$$

onde  $K$  é o coeficiente de troca de calor. O coeficiente de troca de calor,  $K$ , descreve a taxa na qual a temperatura da superfície da água responde aos mecanismos de troca de

Tabela 11 – Dados Meteorológicos - Média Mensal.

Mês	$H_0(\text{Wm}^{-2})$	$T_a(^{\circ}\text{C})$	$R_h(\%)$	$U_{10}(\text{ms}^{-1})$
06/2009	120	13	87	2,08
07/2009	108	13	87	2,48
08/2009	170	15	81	2,41
09/2009	147	16	86	3,10
10/2009	224	19	79	2,95
11/2009	226	21	82	3,11
12/2009	249	21	80	2,80
01/2010	199	21	85	2,61
02/2010	222	22	82	2,54
03/2010	196	20	83	2,51
04/2010	163	17	84	2,39
05/2010	117	15	87	2,45
06/2010	139	13	85	2,50
07/2010	133	15	85	2,69
08/2010	172	13	80	2,84
09/2010	182	16	79	3,34
10/2010	204	15	80	3,37
11/2010	256	18	77	3,04
12/2010	202	20	84	2,89

calor e pode ser definido como

$$K = -\frac{dH_n}{dT_s}. \quad (5.50)$$

Alternativamente à Eq. (5.50), usou-se um coeficiente de troca de calor constante neste Caso 4. Isto foi feito porque vários trabalhos mostram que existe uma defasagem da temperatura da superfície da água com a temperatura de equilíbrio e para obter essa defasagem, o coeficiente de troca de calor foi usado constante. Mais adiante, o coeficiente de troca de calor será estimado com função da temperatura da superfície da água e da velocidade do vento pela Eq. (5.50).

O modelo de balanço de energia superficial acoplado com o modelo de transferência de calor para o corpo d'água foi aplicado no Reservatório do Rio Verde. O período de estudo considerado foi de junho de 2009 a dezembro de 2010. A Tabela 11 mostra a média mensal dos dados meteorológicos desse período. A temperatura de equilíbrio foi estimada a partir das médias mensais dos dados meteorológicos e interpolada linearmente no tempo para servir de entrada no modelo.

As constantes empíricas e físicas utilizadas no modelo são apresentadas na Tabela 12.

A condição inicial foi imposta em junho de 2009 e considerou-se que nessa data o reservatório encontrava-se em situação isotermal ( $T^0(z) = 16^{\circ}\text{C}$ ). Essa consideração

Tabela 12 – Parâmetros utilizados para a simulação do Caso 4.

Parâmetros	Valores Utilizados	Unidades	Fonte
$0 \leq t \leq t_f$	$t_f = 540$ dias	s	autor
$\Delta z$	0,05	m	autor
$\Delta t$	10	s	autor
$\rho_w$	1000	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$K$	4,5	$\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^{-1}$	autor
$T^0(z)$	16	$^{\circ}\text{C}$	autor
$\rho_{ar}$	1,2	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$\beta$	1	$\text{ms}^2$	autor
$\sigma_1$	0,15	adimensional	autor
$g$	9,81	$\text{ms}^{-2}$	–
$0 \leq z \leq H$	$H = 10$	m	Dado do Reserv. do Rio Verde
$B$	65,92	$\text{Pa}^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">Bowen (1926)</a>
$c$	4200	$\text{Jkg}^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">Dake e Harleman (1969)</a>
$c_1$	$2,82 \times 10^{-2}$	m	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$p$	1	adimensional	<a href="#">Sundaram e Rehm (1973)</a>
$\alpha_v$	$2 \times 10^{-4}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	<a href="#">James (1977)</a>
$k$	0,41	adimensional	<a href="#">Garratt (1977)</a>
$C_D$	$2,6 \times 10^{-3}$	adimensional	<a href="#">Walters, Carey e Winter (1978)</a>

foi feita por não haver perfis de temperatura nesse período e, portanto, supôs-se que o perfil de temperatura de junho de 2009 fosse similar ao perfil medido de junho de 2010. A Figura 10 mostra o que seria o início dos meses de outubro de 2009 a fevereiro de 2010 dos perfis de temperatura simulados. Nota-se que até novembro os resultados obtidos mostram um reservatório fracamente estratificado. A partir de dezembro de 2009 os resultados mostram uma situação de razoável de estratificação. O epilímnio, por exemplo, alcançou a profundidade de aproximadamente 3,0 metros em fevereiro de 2010.

O coeficiente de difusão turbulenta mínimo especificado ( $K_{H_{\text{esp}}}$ ) foi usado igual a  $1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Abaixo de  $K_{H_{\text{esp}}}$ , o coeficiente de difusão turbulenta mínimo ( $K_{H_{\text{min}}}$ ) foi usado igual a  $2,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . A Figura 11 ilustra a difusão turbulenta ao longo da profundidade. Nota-se que o coeficiente de difusão turbulenta mínimo especificado,  $K_{H_{\text{esp}}}$ , não é estacionário no espaço e a descontinuidade provocada no  $K_H$  cria elevados gradientes de temperatura aproximadamente na mesma profundidade.

A comparação entre os perfis de temperatura medidos e simulados são mostradas nas Figuras 12 e 13. É importante relatar que os perfis de temperatura foram medidos uma única vez a cada mês e nos dias mencionados em cada figura. Através desses perfis medidos, pode-se concluir que o Reservatório do Rio Verde passou um longo período desestratificado, praticamente de abril a setembro de 2010 e apresentou gradientes de temperatura notáveis de outubro a dezembro de 2010.

Na primeira metade do ano de 2010, o modelo produziu um período de estratificação até maio, porém os perfis medidos mostram que o reservatório desestratificou um mês

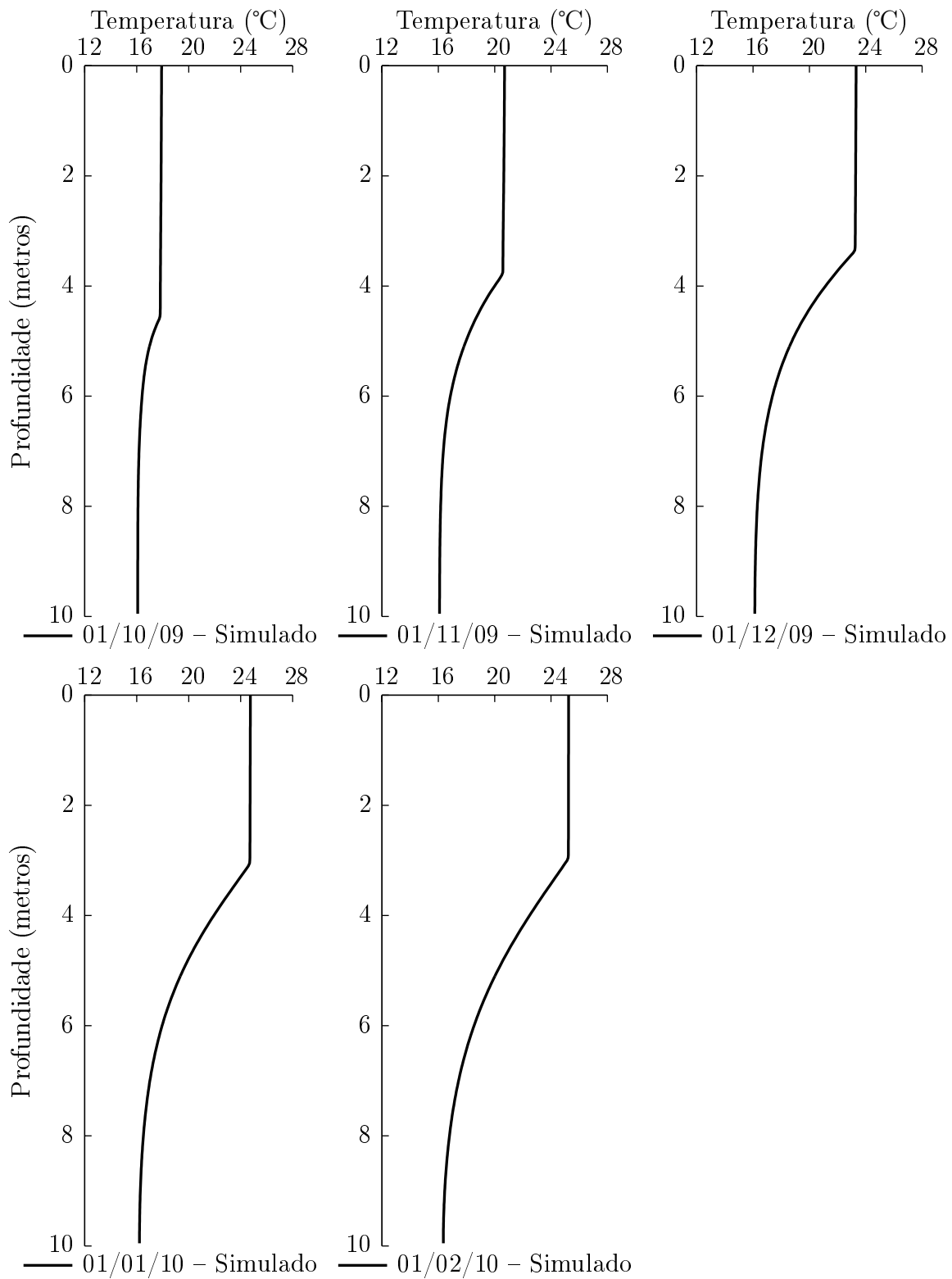


Figura 10 – Perfis de temperatura simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010.

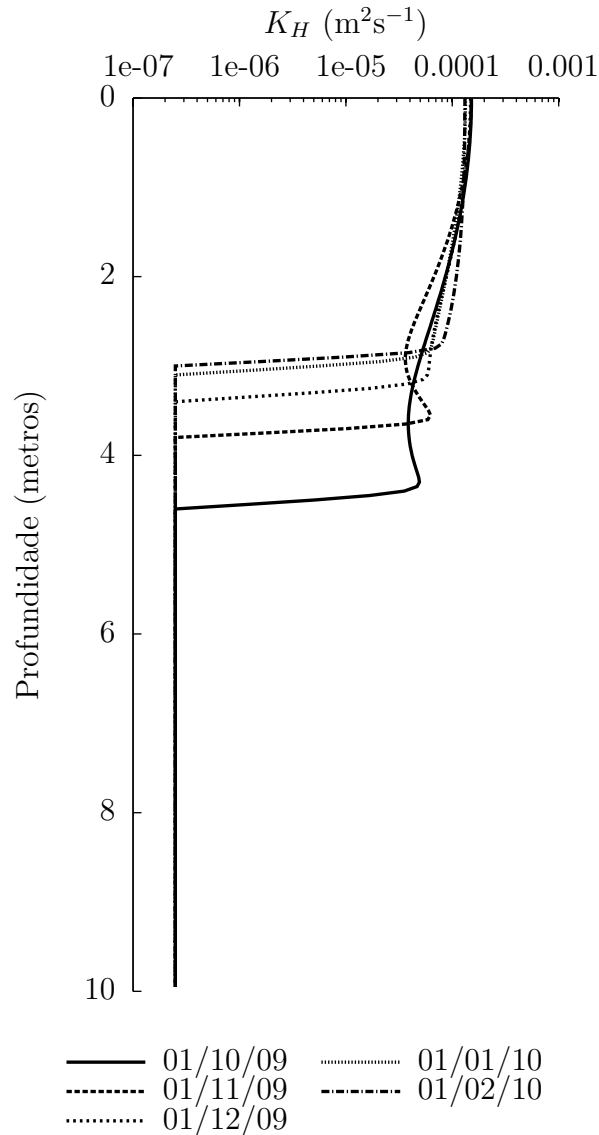


Figura 11 – Perfis do coeficiente de difusão turbulenta simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010.

antes (abril). Para a segunda metade de 2010, o Reservatório do Rio Verde apresentou uma razoável estratificação a partir de outubro. Porém, o modelo não foi capaz de reproduzir esse aquecimento no tempo correto. O motivo pelo fraco aquecimento na segunda metade de 2010 está relacionado aos baixos valores de temperatura de equilíbrio estimados associado ao uso de baixos valores de  $K$ , como pode ser visto na Figura 14 a partir de 480 dias (representa os últimos meses de 2010).

A Figura 14 ilustra o ciclo de estratificação estimado para o Reservatório do Rio Verde e a partir do dia 180 inicia-se o ano de 2010. Notou-se que o modelo apresentou suas maiores temperaturas superficiais e suas maiores diferenças de temperatura da superfície e do fundo entre os dias 180 e 240 que representam os meses de janeiro a março de 2010. A partir de 240 dias os resultados indicam um período contínuo e longo de resfriamento até a total desestratificação que ocorreu aproximadamente entre os dias 360 e 480 (meses de

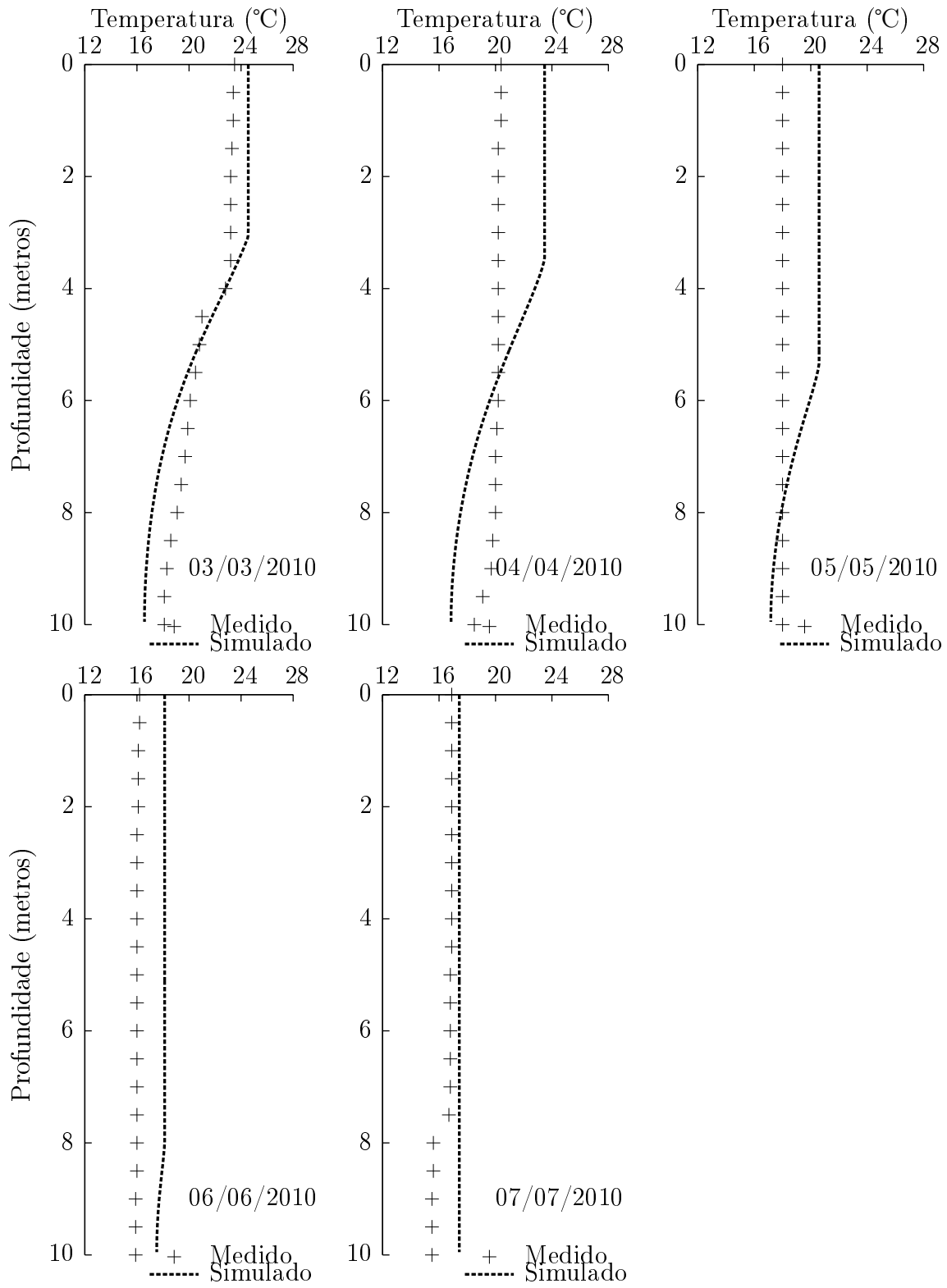


Figura 12 – Perfis de temperatura medidos e simulados.

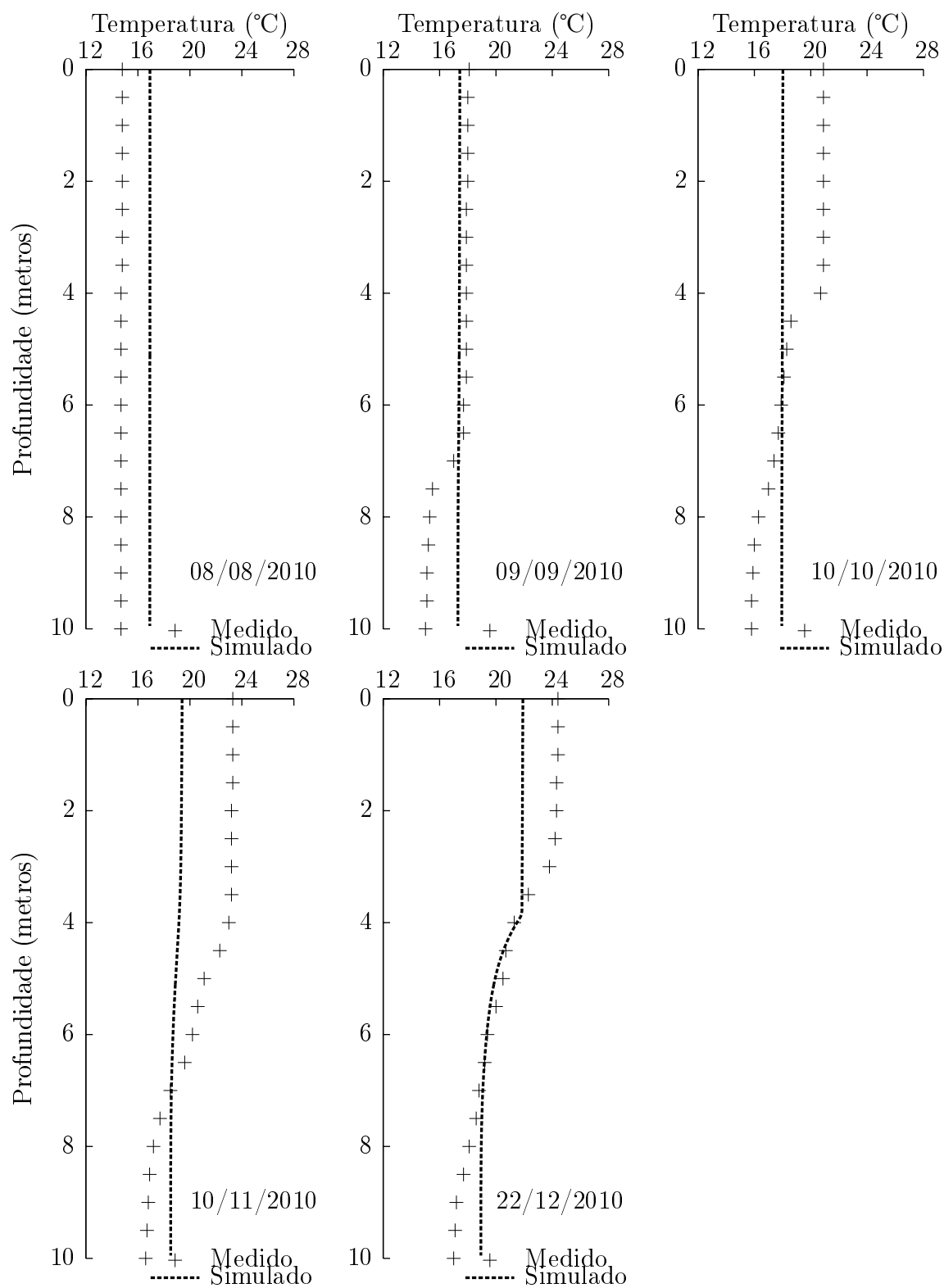


Figura 13 – Perfis de temperatura medidos e simulados (continuação).

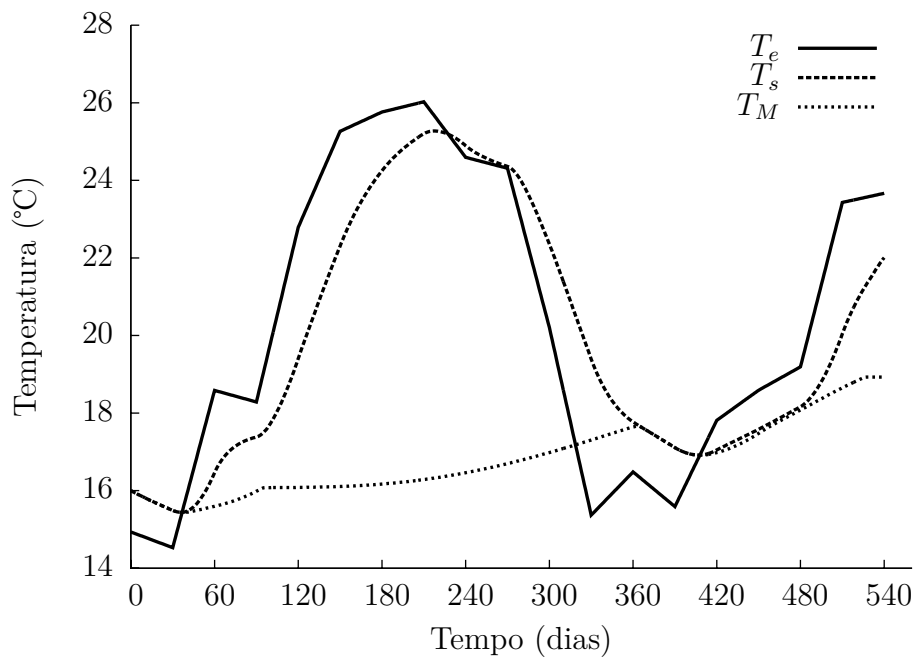


Figura 14 – Ciclo de estratificação estimado para o Reservatório do Rio Verde.

julho a outubro). A partir de 480 dias (início de novembro), o modelo mostrou um contínuo período de aquecimento. Apesar da temperatura da superfície da água ser diferente da temperatura do fundo no início do aquecimento e no final do resfriamento, os perfis de temperatura simulados mostraram que uma forte estratificação surgiu apenas no final de 2009 e começo de 2010 (representa o período de 150 a 240 dias na Figura 14).

#### 5.4.1 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES: CASO 4

A temperatura de equilíbrio estimada a partir dos dados meteorológicos médios mensais obtidos no Reservatório do Rio Verde apresentou variação sazonal. Portanto, concluí-se que o reservatório apresenta um período onde se encontra estratificado e outro desestratificado ao longo de ciclo anual. Esses períodos foram confirmados a partir dos perfis de temperatura medidos em diferentes meses em 2010. As temperaturas de equilíbrio estimadas no final de 2009 e início de 2010 foram as de maiores valores obtidos e nesse período uma situação de estratificação bem definida foi observado. Na segunda metade de 2010, a temperatura de equilíbrio estimada não foi suficientemente elevada para produzir uma situação de estratificação bem definida e apresentou baixa concordância com os dados medidos.

Para observar uma defasagem da temperatura da superfície da água em relação a temperatura de equilíbrio, foi necessário usar um coeficiente de troca de calor constante. Porém, essa defasagem produziu um período de estratificação mais longo no primeiro semestre de 2010 e uma situação de aquecimento relativamente fraca no segundo semestre



de 2010 comparado com os perfis de temperatura medidos. Portanto, a simulação mostrou baixa concordância com os perfis de temperatura medidos.

A profundidade de formação da termoclina parece não ser uma situação estável no aquecimento. Está característica é mais óbvia para o Caso 4, onde a velocidade do vento não é constante. No entanto, a não estacionaridade da termoclina foi observado em todos os Casos onde a difusão turbulenta foi inserida no problema com suas devidas considerações e modificações.

## 5.5 SIMULAÇÃO CASO 5

Para a simulação do Caso 5, o coeficiente de troca de calor ( $K$ ) é estimado com função da temperatura da superfície da água ( $T_s$ ) e da velocidade do vento ( $U$ ). Está é a única alteração feita em relação ao Caso 4. A expressão derivado para  $K$  neste trabalho é

$$K = 4\varepsilon_W \sigma (T_s + 273)^3 + f(U) 611 \exp\left(\frac{17,27T_s}{237,3 + T_s}\right) \left(\frac{17,27(237,3 + T_s) - 17,27T_s}{(237,3 + T_s)^2}\right) + Bf(U). \quad (5.51)$$

Os resultado obtidos de perfis de temperatura podem ser vistos nas Figura 15 a 17. Observa-se que a concordância com os perfis medidos são melhores que o Caso 4, onde o coeficiente de troca de calor foi usado constante.

O coeficiente de troca de calor fisicamente significa a taxa que a temperatura da superfície da água responde as mudanças meteorológicas. Na realidade, isto significa o quão rápido a temperatura da superfície da água se aproxima da temperatura de equilíbrio da interface ar-água. Na Figura 18, observa-se que a temperatura da superfície da água é praticamente igual à temperatura de equilíbrio ao longo do período simulado com  $K$  variando.

A Figura 19 ilustra o coeficiente de troca de calor estimado ao longo do período estudado. Lembrando que para o Caso 4, o coeficiente de troca de calor foi usado constante e igual a  $4,5 \text{ Wm}^{-2}\text{C}^{-1}$ .

A Figura 20 mostra a temperatura média mensal medida a 2 metros de profundidade ( $T_1$ ) no Reservatório do Rio Verde e a temperatura de equilíbrio média mensal em relação ao tempo. Observa-se que a diferença entre ambas as temperatura é relativamente pequena, mostrando que a temperatura média mensal medida a 2 metros de profundidade está praticamente em fase com a temperatura de equilíbrio estimada mensalmente e, conseqüentemente, a temperatura superficial da água também. Assim, a defasagem da

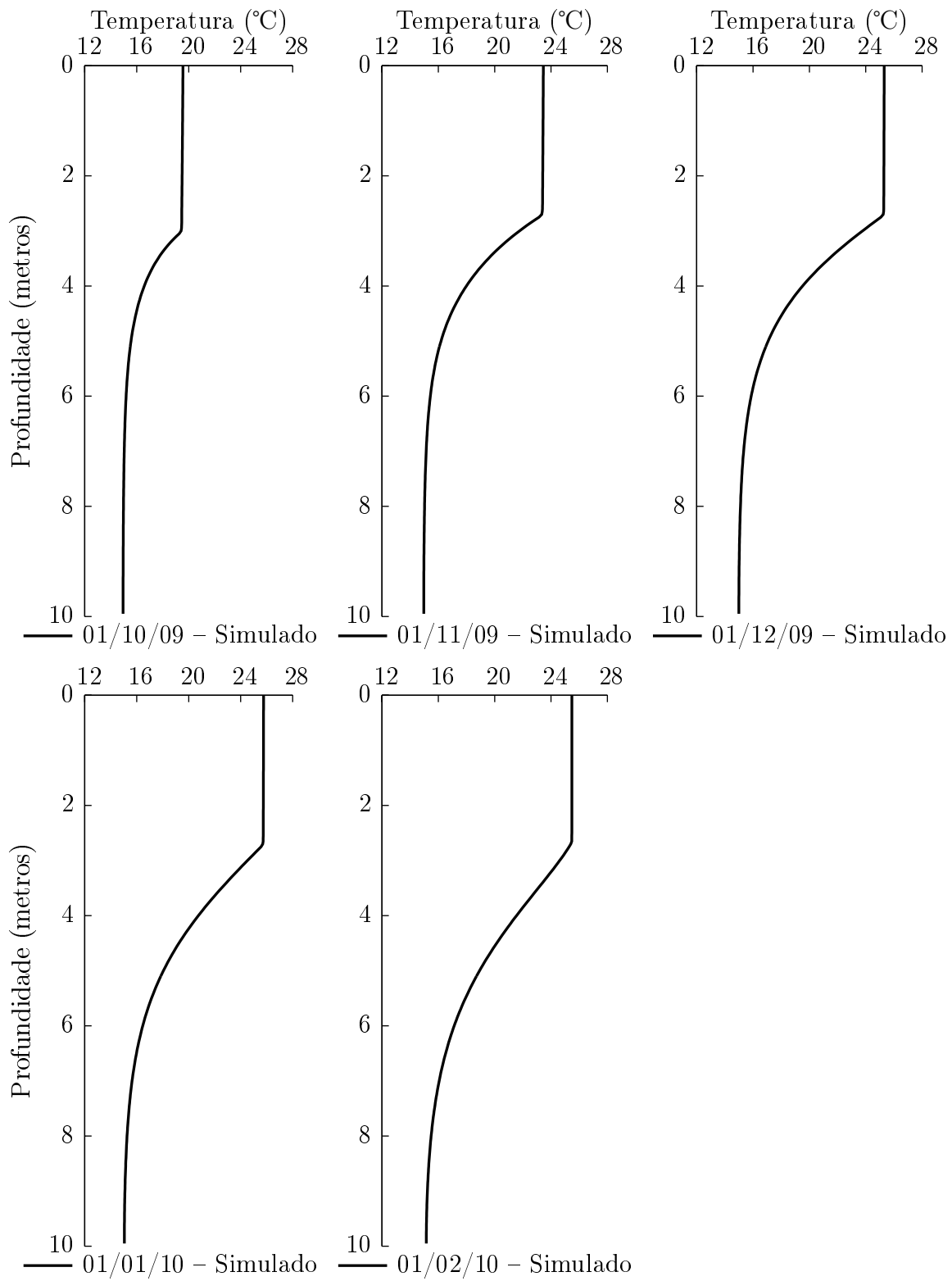


Figura 15 – Perfis de temperatura simulados de outubro de 2009 a fevereiro de 2010 –  $K = f(T_s, U)$ .

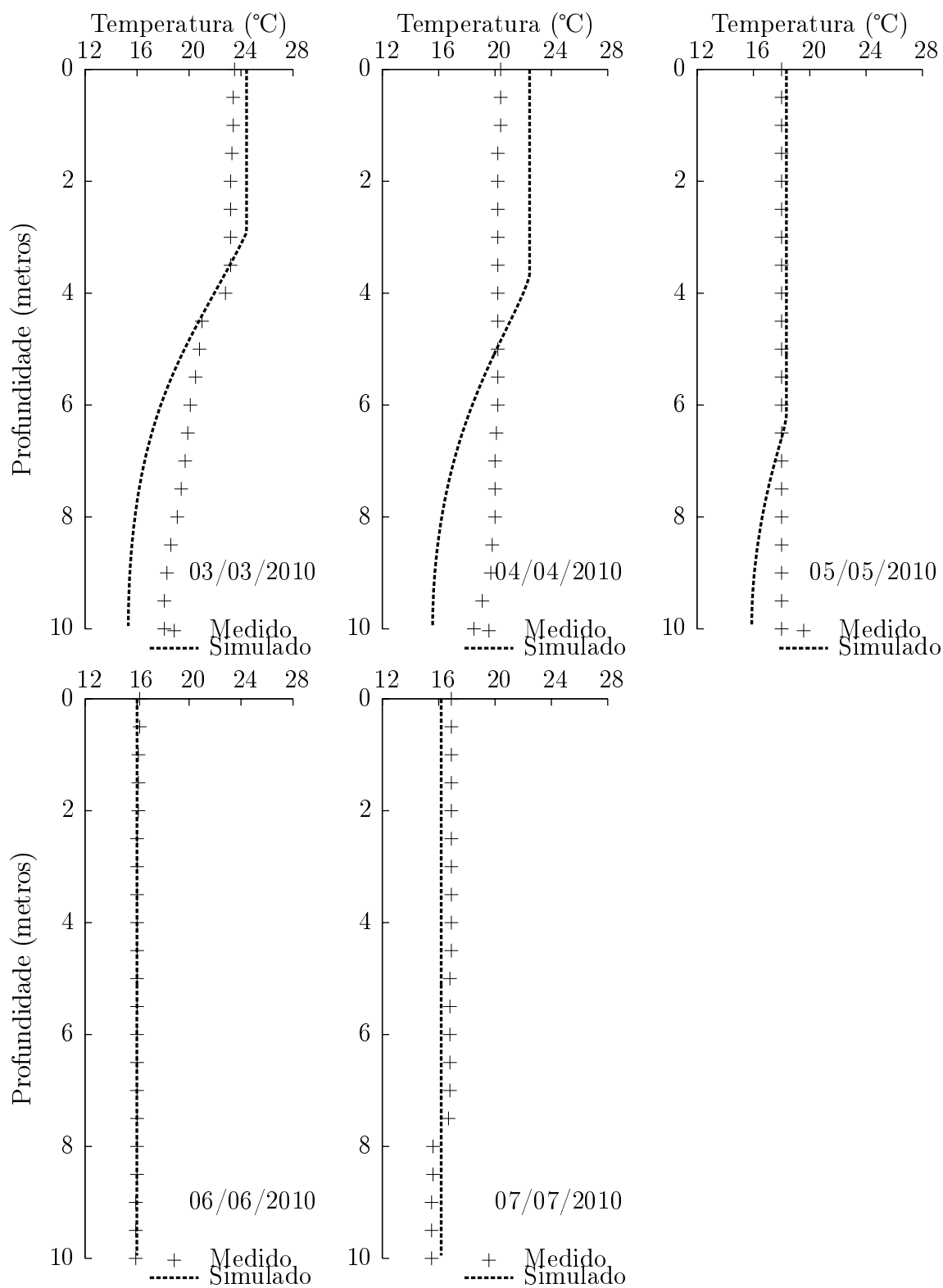


Figura 16 – Perfis de temperatura medidos e simulados –  $K = f(T_s, U)$ .

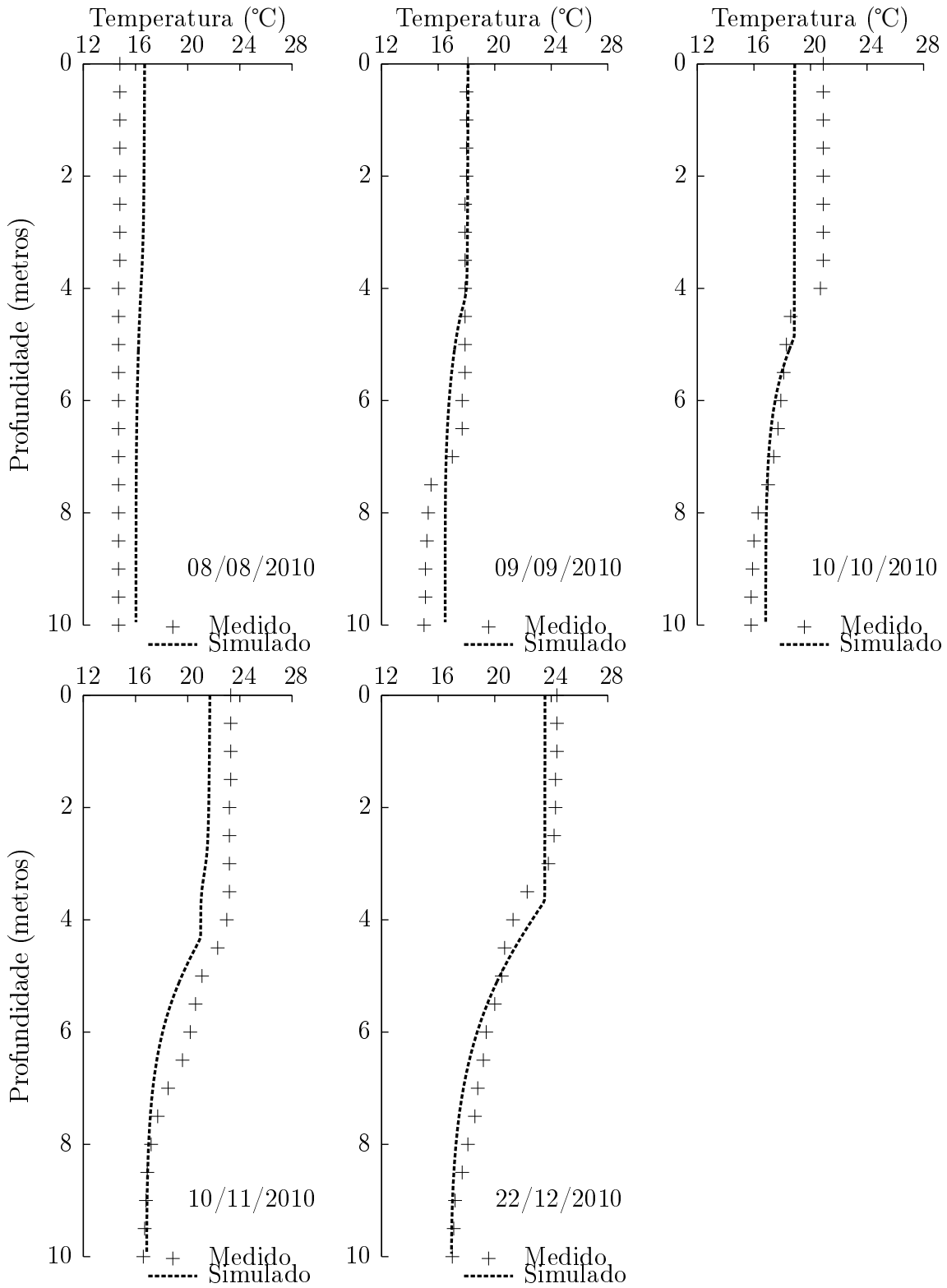


Figura 17 – Perfis de temperatura medidos e simulados (continuação) –  $K = f(T_s, U)$ .

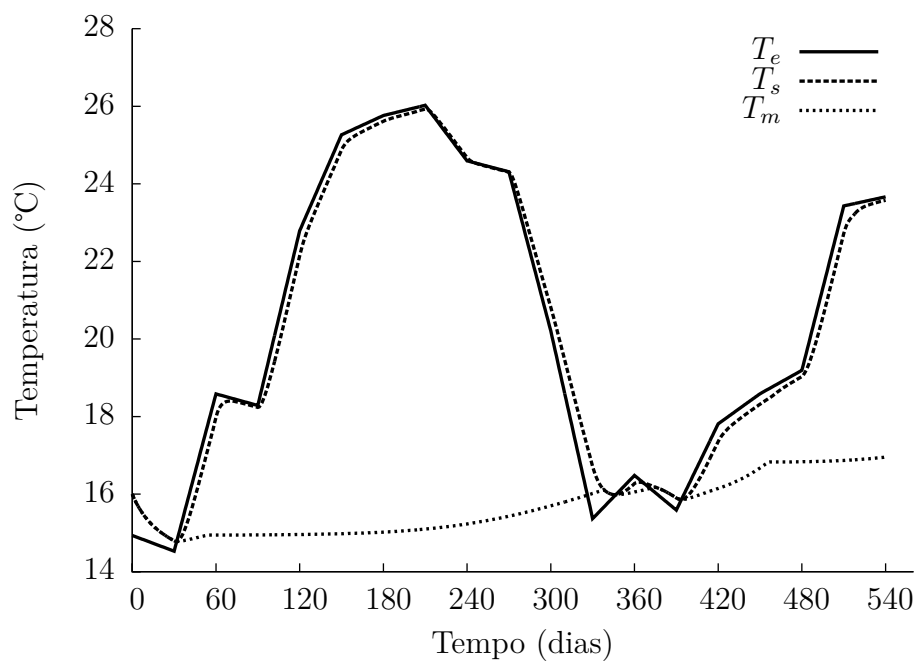


Figura 18 – Ciclo de estratificação estimado para o Reservatório do Rio Verde –  $K = f(T_s, U)$ .

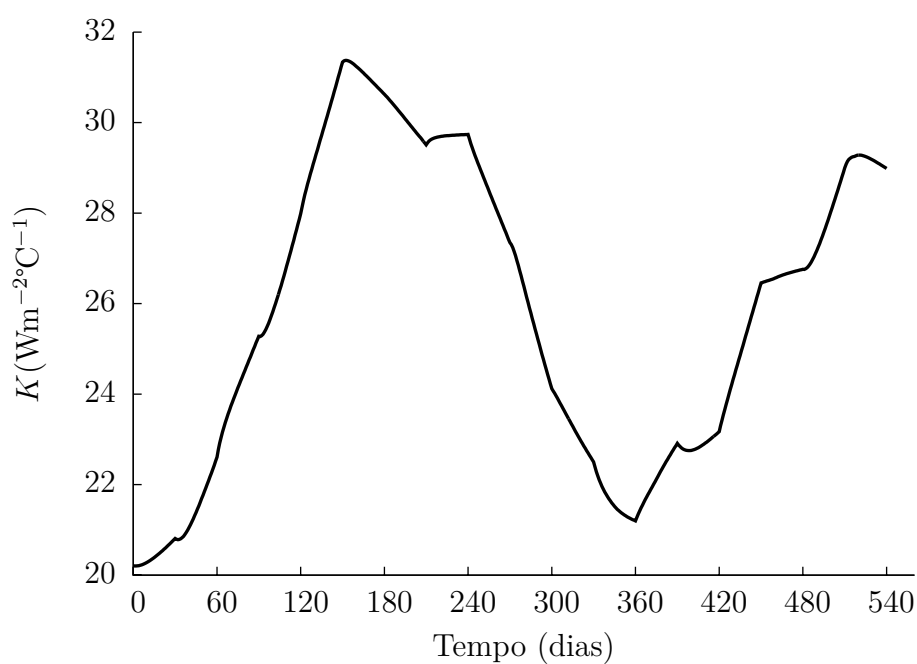


Figura 19 – O coeficiente de troca de calor variando –  $K = f(T_s, U)$ .

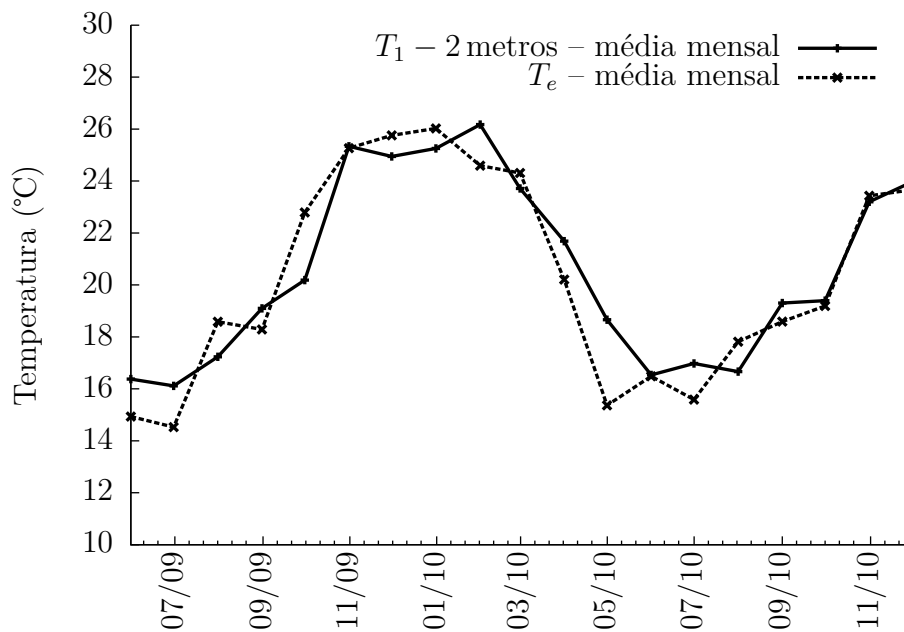


Figura 20 – Temperatura da água medida a 2 metros de profundidade ( $T_1$ ) e Temperatura de equilíbrio ( $T_e$ ) plotada em relação ao tempo –  $K = f(T_s, U)$ .

temperatura da superfície da água em relação a temperatura de equilíbrio parece ser pequena para o Reservatório do Rio Verde no período estudado. Essa rápida resposta do corpo d'água às mudanças meteorológicas é possível com altas taxas do coeficiente de troca de calor. Desta forma, o coeficiente de troca de calor estimado em relação à temperatura da superfície da água e da velocidade do vento mostrou-se mais adequado para reproduzir melhor os perfis de temperatura medidos.

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES GERAIS

O Caso 1 mostrou que quando o coeficiente de difusão é considerado constante, a forma com que se assume como o corpo d'água absorve a radiação solar incidente produz diferentes resultados de perfis de temperatura próximo à superfície. [Dake e Harleman \(1969\)](#) mostraram a partir de experimentos laboratoriais que uma parte da energia é absorvida pela superfície da água e o restante penetra na coluna da água. Porém, o maior problema desta teoria é que na prática, o corpo hídrico raramente apresenta essas formas de perfis de temperatura obtidos no Caso 1. Isto porque a ação da velocidade do vento adjacente à superfície da água é capaz de produzir mistura suficientemente grande nas camadas superiores de modo a alterar a distribuição do calor no corpo d'água.

O coeficiente de difusão turbulenta foi introduzido no Caso 2 e assumido ser função da velocidade do vento e gradientes de temperatura estáveis. Os resultados de perfis de temperatura mostraram que a turbulência causada pela ação do vento foi capaz de distribuir de forma mais realista o calor dentro do corpo d'água. Observou-se também que a formação da termoclina não é fixa no espaço. Para produzir um elevado gradiente de temperatura, foi necessário causar uma descontinuidade no coeficiente de difusão turbulenta. De acordo com [Sundaram e Rehm \(1971b\)](#), isto é justificado porque a difusão turbulenta parece não ser válida em toda a coluna d'água em uma situação de forte estratificação.

Corpos d'água que apresentam um ciclo sazonal de estratificação térmica podem ser representados pelo Caso 3. Muitos trabalhos revisados na literatura utilizam o conceito de temperatura de equilíbrio para prever o ciclo de estratificação térmica vertical de corpos d'água. O autor acredita que o Caso 3 possa ser usado como uma avaliação prévia do estudo de estratificação térmica, desde que seja validado como feito por [Sundaram e Rehm \(1973\)](#) ou mesmo na falta de dados meteorológicos.

As temperaturas de equilíbrio estimadas a partir das médias mensais dos dados meteorológicos obtidos no Reservatório do Rio Verde mostraram uma variação sazonal (junho de 2009 a dezembro de 2010). Observou-se que a diferença nos valores das médias mensais de mínimo e máximo da temperatura de equilíbrio não foram muito diferentes comparados com os valores mínimos e máximos da temperatura da superfície da água observadas nos perfis de temperatura de 2010 (Caso 5). A simulação numérica mostrou que para a estrutura térmica acompanhar as medições dos perfis de temperatura de 2010, a defasagem entre a temperatura de equilíbrio e a temperatura da superfície da água parecer ser pequeno e, em relação à média mensal, a temperatura da superfície da água mostrou estar bem próxima da temperatura de equilíbrio (Caso 5 comparado ao Caso 4).

A aplicação do modelo de estratificação térmica proposto para o Reservatório do Rio Verde mostrou-se satisfatória. A calibração do modelo se deu através de poucos parâmetro e comparado com os casos anteriores o valor de  $\sigma_1$  e a modificação do coeficiente de difusão turbulenta (ex.:  $K_{H_{esp}}$  e  $K_{H_{min}}$ ) foram ajustados. Assim, a profundidade de aparecimento da termoclina pode ser ajusta pela calibração do modelo.

Para futuros trabalhos, é recomendado que uma atenção maior seja dada à estimativa da temperatura de equilíbrio e a forma na qual as médias dos dados meteorológicos são feitas. O autor acredita que a *média móvel* dos dados meteorológicos seja uma alternativa que possa melhorar o problema da defasagem dos perfis de temperatura estimados comparados às medições observadas no presente trabalho (ex.: Caso 4). Outro fator importante, seria observar vários ciclos anuais dos dados meteorológicos para observar médias típicas e corrigir possíveis erros. Um exemplo seria estimar a temperatura de equilíbrio para mais de um ciclo anual e compará-las.



## Referências

- ALDAMA, A. A.; HARLEMAN, D. R. F.; ADAMS, E. E. Hypolimnetic mixing in a weakly stratified lake. *Water Resources Research*, v. 25, n. 5, p. 1014–1024, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- ANDERSON, E. R. *Water-Loss Investigations: Volume 1 - Lake Hefner Studies*. United States Department of the Interior: [s.n.], 1954. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 77.
- ANTONOPOULOS, V. Z.; GIANNIOU, S. K. Simulation of water temperature and dissolved oxygen distribution in lake vegoritis, greece. *Ecological Modelling*, v. 160, p. 39–53, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 19, 25 e 31.
- BOGAN, T.; MOHFSENI, O.; STEFAN, H. G. Stream temperature-equilibrium temperature relationship. *Water Resources Research*, v. 30, n. 9, p. 1–12, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- BOWEN, I. S. The ratio of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface. *Physical Review*, v. 27, p. 779–787, 1926. Citado 3 vezes nas páginas 38, 79 e 81.
- CANELE, P. K.; CHAPRA, S. C. *Numerical Methods for engineers*. 5. ed. New York: Higher Education, 2006. Citado na página 50.
- CAPRARIIS, P. D. A note on the development of the thermocline in temperate lakes. *Ecological Modelling*, v. 12, p. 213–219, 1981. Citado na página 24.
- CHOW, V. T. *Applied Hydrology*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1988. Citado na página 36.
- COHEN, P. K.; KUNDO, M. I. *Fluid Mechanics*. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2000. Citado na página 43.
- CUNHA, C. *Métodos Numéricos*. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2000. Nenhuma citação no texto.
- CUNHA, C. L. N. *Eutrofização em Reservatórios: Gestão Preventiva*. Curitiba: UFPR, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 53.
- DAKE, J. M. K.; HARLEMAN, D. F. Thermal stratification in lakes: Analytical and laboratory studies. *Water Resources Research*, v. 5, n. 2, p. 484–495, 1969. Citado 12 vezes nas páginas 22, 28, 33, 58, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 93 e 102.
- EDINGER, J. E. Vertical temperature structure and water surface heat exchange. *Water Resources Research*, v. 6, n. 5, p. 1392–1395, 1970. Citado na página 70.
- EDINGER, J. E.; DUTTIWELLER, D. W.; GEYER, J. C. The response of water temperatures to meteorological conditions. *Water Resources Research*, v. 4, n. 5, p. 1137–1143, 1968. Citado 8 vezes nas páginas 19, 25, 36, 39, 70, 77, 78 e 79.
- ESTEVEES, F. A. *Fundamentos de Limnologia*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1998. Citado na página 21.

- FLETCHER, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques*. 2. ed. New York: Springer-Verlog, 1992. Citado na página 45.
- FORTURNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 51.
- GARRATT, J. K. Review of drag coefficients over oceans and continents. *Mon. Weath. Rev.*, v. 105, p. 915–929, 1977. Citado 5 vezes nas páginas 30, 63, 65, 73 e 81.
- HANEY, R. L. Surface thermal boundary conditions for ocean circulation models. *Journal of Physical Oceanography*, v. 1, n. 4, p. 241–248, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 26.
- HARBECK, G. E. A practical field technique for measuring reservoir evaporation utilizing mass-transfer theory. p. 101–105, 1962. Citado na página 25.
- HENDERSON-SELLERS, B. Development and application of “u.s.e.d.”: A hydroclimate lake stratification model. *Ecological Modelling*, v. 21, p. 233–246, 1984. Citado na página 24.
- HENDERSON-SELLERS, B. *Engineering Limnology*. Massachusetts: Pitman Publishing Inc, 1984. Citado 7 vezes nas páginas 19, 21, 27, 28, 32, 33 e 61.
- HENDERSON-SELLERS, B. Calculating the surface energy balance for lake and reservoir modeling: a review. *Reviews of Geophysics*, v. 24, n. 3, p. 625–649, 1986. Citado na página 21.
- HONDZO, M.; STEFAN, H. G. Three case studies of lake temperature and stratification response to warmer climate. *Water Resources Reserarch*, v. 27, n. 8, p. 1837–1846, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 19, 25 e 34.
- HUTCHINSON, G. E. *A Treatise on Limnology v. 1*. New York: Wiley, 1957. Citado na página 21.
- JAMES, I. D. A model of the annual cycle of temperature in a frontal region of the celtic sea. *Estuarine and Coastal Marine Science*, n. 5, p. 339–353, 1977. Citado 5 vezes nas páginas 23, 31, 65, 73 e 81.
- KEIJMAN, J. Q. The estimation of the energy balance of a lake from simple weather data. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 7, p. 399–407, 1974. Citado na página 26.
- LIVINGSTONE, D. M.; IMBODEN, D. M. Annual heat balance and equilibrium temperature of lake aegeri, switzerland. *Aquatic Sciences*, v. 51, n. 4, p. 351–369, 1989. Citado 6 vezes nas páginas 26, 31, 32, 34, 35 e 77.
- MCCORMICK, M. J.; SCAVIA, D. Calculation of vertical profiles of lake-averaged temperature and diffusivity in lakes ontario and washington. *Water Resources Research*, v. 17, n. 2, p. 305–310, 1981. Citado na página 24.
- MOORE, F. K.; JALURIA, Y. Thermal effects of power plants on lakes. *Journal of Heat Transfer*, p. 163–168, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow: Series in Computacional Methods in Mechanics and Thermal Sciences*. New York: Hemisphere Publishing Co, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 51.

- RAHMAN, M.; MARCOTTE, N. On thermal stratification in large bodies of water. *Water Resources Research*, p. 1143–1147, 1974. Citado na página 23.
- RILEY, M. J.; STEFAN, H. G. Minlake: A dynamic lake water quality simulation model. *Ecological Modelling*, v. 43, p. 155–182, 1988. Citado na página 19.
- SUNDARAM, T. R.; REHM, R. G. Effects of thermal discharges on the stratification cycle of lakes. *AIAA Journal*, v. 10, n. 2, p. 204–210, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- SUNDARAM, T. R.; REHM, R. G. Formation and maintenance of thermoclines in temperate lakes. *AIAA Journal*, v. 9, n. 7, p. 1322–1329, 1971. Citado 11 vezes nas páginas 22, 24, 29, 30, 31, 62, 63, 64, 69, 73 e 93.
- SUNDARAM, T. R.; REHM, R. G. The seasonal thermal structure of deep temperate lakes. *Tellus*, n. 2, p. 157–167, 1973. Citado 10 vezes nas páginas 23, 24, 29, 64, 65, 72, 73, 75, 81 e 93.
- SWEERS, H. E. A nomogram to estimate the heat-exchange coefficient at the air-water interface as a function of wind speed and temperature; a critical survey of some literature. *Journal of Hydrology*, v. 30, p. 375–401, 1976. Citado 6 vezes nas páginas 9, 26, 36, 37, 40 e 78.
- WALTERS, R. A.; CAREY, G. F.; WINTER, D. F. Temperature computation for temperate lakes. *Appl. Math. Modelling*, v. 2, p. 41–48, 1978. Citado 7 vezes nas páginas 23, 31, 63, 65, 69, 73 e 81.
- WU, J. Wind-stress coefficients over sea surface near neutral conditions - a revisit. *Phys. Oceanogr.*, v. 10, p. 727–740, 1980. Citado na página 30.



# Apêndices



# APÊNDICE A – TESTE DE CORREÇÃO DE PERFIS DE TEMPERATURA INSTÁVEIS

Como foi visto na seção 4.3, é necessário corrigir os perfis de temperatura ao longo da coluna d'água em situações instáveis. Como exemplo, é usada a equação da conservação da energia e a temperatura de equilíbrio oscilando para criar situações instáveis. O conjunto de equações abaixo são usados na solução numérica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_M \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < H \quad \text{e} \quad t > 0; \quad (\text{A.1})$$

$$T(z, t = 0) = T^0(z); \quad (\text{A.2})$$

$$\rho_W c K_M \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -H_n = -K(T_e - T); \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_W c K_M \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \quad (\text{A.4})$$

$$T_e(t) = \bar{T}_e - \delta T_e \cos(\omega t + \alpha); \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha = \text{tag}^{-1} \left( \frac{1}{1 + 2\beta_1 K / \rho_W c \omega} \right); \quad \text{e} \quad (\text{A.6})$$

$$\beta = \left( \frac{\omega}{2D_v} \right)^{1/2} = \left( \frac{\omega}{2K_M} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

A Tabela 13 apresenta os parâmetros considerados para a solução numérica utilizando o Método de Diferenças Finitas esquema de Crank-Nicolson.

Na Figura 21, alguns perfis de temperatura são mostrados para os primeiros 30 dias de simulação. Os perfis dos dias 20 a 30 foram corridos de tal forma a evitar situações instáveis e ao mesmo tempo tentando conservar energia definido pela expressão abaixo (ver seção 4.3):

$$T^* = \frac{\frac{T_0^{j+1}}{2} + \sum_{i=1}^{NPI-1} T_i^{j+1}}{NCI + \frac{1}{2}}. \quad (\text{A.8})$$

Tabela 13 – Parâmetros utilizados para o teste de conservação de energia.

Parâmetros	Valores Utilizados	Unidades	Fonte
$0 \leq z \leq H$	$H = 10$	m	autor
$0 \leq t \leq t_f$	$t_f = 90$ dias	s	autor
$\Delta z$	0,01	m	autor
$\Delta t$	10	s	autor
$\rho_w$	1000	$\text{kgm}^{-3}$	autor
$K$	40	$\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^{-1}$	autor
$T^0(z)$	17	$^{\circ}\text{C}$	autor
$\bar{T}_e$	20	$^{\circ}\text{C}$	autor
$\delta T_e$	10	$^{\circ}\text{C}$	autor
$\omega$	$\frac{2\pi}{30 \text{ dias}}$	radianos dias $^{-1}$	autor
$c$	4200	$\text{Jkg}^{\circ}\text{C}^{-1}$	Dake e Harleman (1969)
$K_M$	$1,4 \times 10^{-5}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	Dake e Harleman (1969)

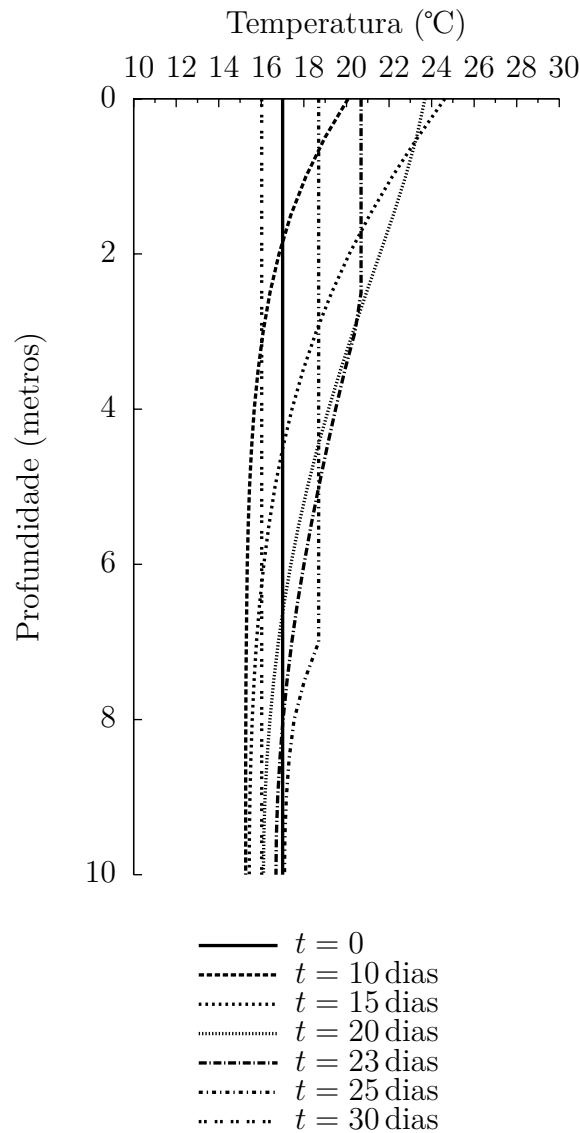


Figura 21 – Perfis de temperatura.



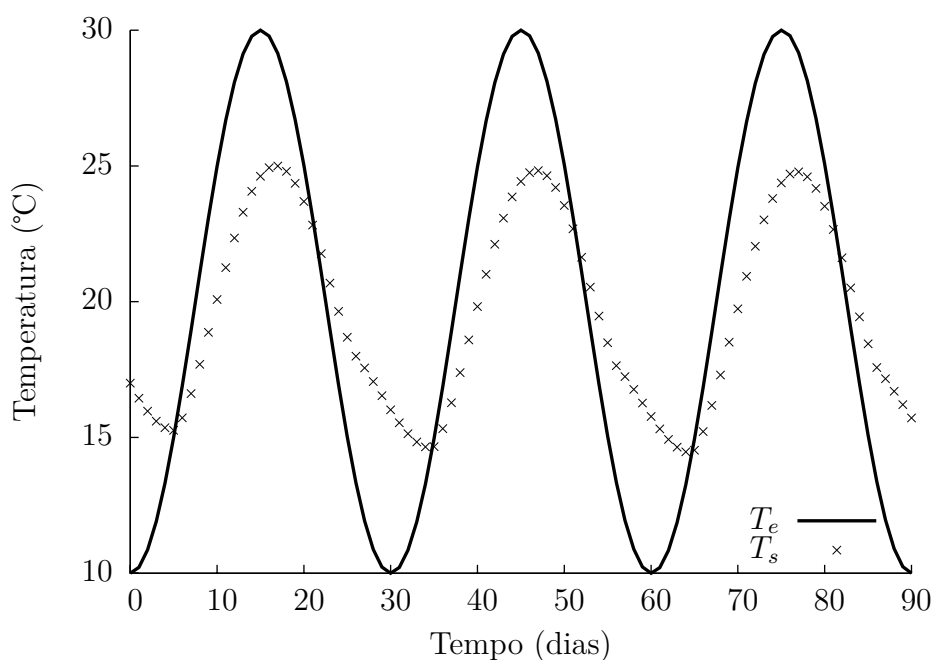


Figura 22 – Temperatura de equilíbrio e superficial ao longo do tempo.

A Figura 22 mostra os resultados obtidos da temperatura de equilíbrio e superficial ao longo de 90 dias de simulação, sendo que a temperatura de equilíbrio foi suposta ter um ciclo completo após 30 dias.

A Figura 23 ilustra o fluxo de energia ao longo do tempo.  $H_n$  é o fluxo de energia total e  $\frac{E^{j+1}-E^j}{\Delta t}$  é o fluxo de energia calculado a partir de dois passos de tempo consecutivos ao longo da coluna d'água. O fluxo de energia negativo representa que o sistema está perdendo energia e o fluxo de energia positivo está ganhando energia. A Figura 23 mostra que a conservação de energia está melhor em situações instáveis do que estáveis. Portanto, para este exemplo, o critério de correção dos perfis de temperatura instáveis parece adequado.

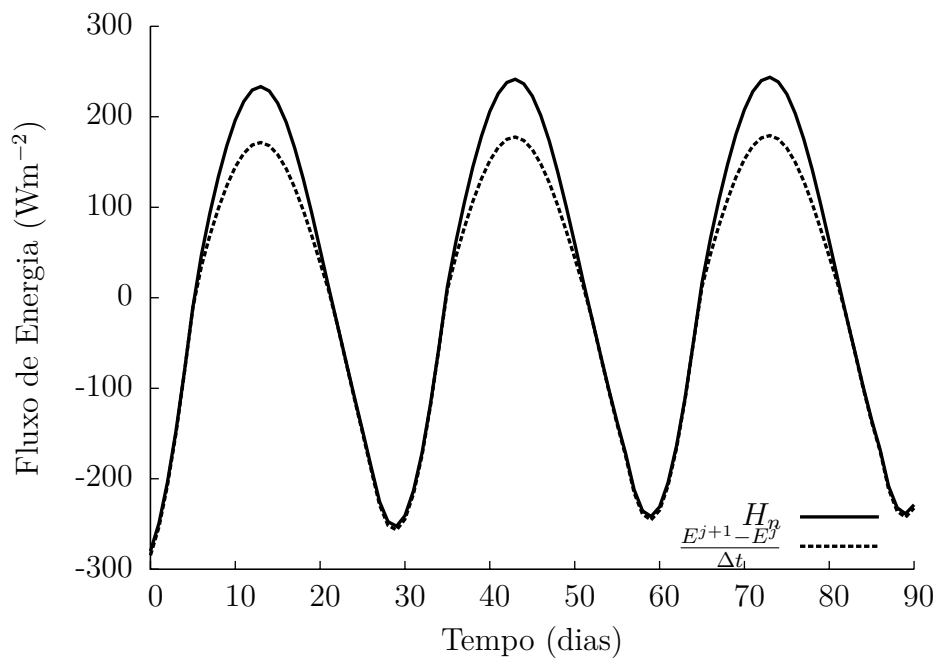


Figura 23 – Conservação da energia ao longo do tempo.