

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDMILSON PEREIRA DA CRUZ

GRAFOS BICLIQUE DE GRAFOS DE BI-INTERVALOS E BI-ARCO-CIRCULARES

CURITIBA PR

2018

EDMILSON PEREIRA DA CRUZ

GRAFOS BICLIQUE DE GRAFOS DE BI-INTERVALOS E BI-ARCO-CIRCULARES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Informática no Programa de Pós-Graduação em Informática, setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Pires Guedes.

Coorientador: Dr^a. Marina Groschaus.

CURITIBA PR

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

C957g

Cruz, Edmilson Pereira da

Grafos biclique de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares / Edmilson Pereira da Cruz. – Curitiba, 2018.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Informática, 2018.

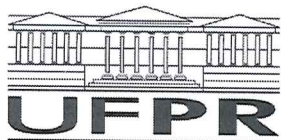
Orientador: André Luiz Pires Guedes.

Coorientadora: Marina Groshaus.

1. Grafos biclique. 2. Grafos de bi-intervalos. 3. Grafos bi-arco-circulares. I. Universidade Federal do Paraná. II. Guedes, André Luiz Pires. III. Groshaus, Marina. IV. Título.

CDD: 004

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO INFORMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em INFORMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDMILSON PEREIRA DA CRUZ** intitulada: **Grafos Biclíque de Grafos de Bi-Intervalos e Bi-Arco-Circulares**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 06 de Junho de 2018.

ANDRÉ LUIZ PIRES GUEDES

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

MARINA ESTHER GROSHAUS

Coorientador - Avaliador Externo (UBA)

SHEILA MORAIS DE ALMEIDA

Avaliador Externo (UTFPR)

RENATO JOSÉ DA SILVA CARMO

Avaliador Interno (UFPR)



AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. André Guedes e Dr^a. Marina Groschaus, por me apresentarem a um tópico bastante interessante de ser estudado e por supervisionarem o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores Fabiano Silva, Renato Carmo e Sheila de Almeida pelas contribuições dadas durante o exame de qualificação e durante a defesa final. Tais contribuições permitiram melhorar a qualidade do conteúdo aqui apresentado.

Agradeço também aos demais integrantes do ARG, sejam eles professores ou alunos, por fazerem dele um grupo de pesquisa acolhedor onde podemos discutir livremente nosso interesse na ciência da computação teórica.

RESUMO

Um *modelo bipartido de intervalos* é uma bipartição de um número finito de intervalos da reta real. Um *modelo bipartido arco-circular* é uma bipartição de um número finito de arcos num círculo. Um *grafo de bi-intervalos* é um grafo de intersecção de um modelo bipartido de intervalos onde cada vértice corresponde a um intervalo e dois vértices compartilham uma aresta se, e somente se, ambos intervalos correspondentes intersectam e não pertencem à mesma parte. Da mesma maneira, um *grafo bi-arco-circular* é o grafo de intersecção de um modelo bipartido arco-circular onde os vértices correspondem a arcos e dois vértices compartilham uma aresta se, e somente se, ambos arcos correspondentes intersectam e não pertencem a mesma parte. O *grafo biclique* de um grafo G é o grafo de intersecção de todas bicliques maximais de G . Neste trabalho, apresentamos um algoritmo de varredura para encontrar todas bicliques maximais de um grafo de bi-intervalos a partir de um dado modelo bipartido de intervalos e propomos uma adaptação desse algoritmo para encontrar as bicliques maximais de um grafo bi-arco-circular. Nós também apresentamos algumas propriedades de bicliques de grafos de bi-intervalos quando vistas como conjuntos de intervalos de um modelo bipartido de intervalos. Introduzimos a noção de *vãos* e *centros* dessas bicliques e, baseado nessas propriedades estruturais, mostramos que todo grafo biclique de um grafo de bi-intervalos é um grafo de co-comparabilidade livre de $K_{1,4}$.

Palavras-chave: Grafos biclique, Grafos de bi-intervalos, Grafos bi-arco-circulares.

ABSTRACT

A *bipartite interval model* is a bipartition of a finite number of intervals on the real line. A *bipartite circular-arc model* is a bipartition of a finite number of arcs on a circle. An *interval bigraph* is an intersection graph of a bipartite interval model in which each vertex corresponds to an interval and two vertices share an edge if and only if both corresponding intervals intersect and do not belong to the same part. Likewise, a *circular-arc bigraph* is the intersection graph of a bipartite circular-arc model where its vertices correspond to arcs and two vertices share an edge if and only if both corresponding arcs intersect and do not belong to the same part. The *biclique graph* of a graph G is the intersection graph of all maximal bicliques in G . In this work, we present a sweepline algorithm for finding all maximal bicliques of an interval bigraph from a given bipartite interval model and we propose an adaption of this algorithm for finding the maximal bicliques of a circular-arc bigraph. We also present some structural properties of bicliques of interval bigraphs when seen as sets of intervals from a bipartite interval model. We introduce the notion of *gaps* and *centers* of these bicliques and, based on these structural properties, we show that all biclique graphs of interval bigraphs are $K_{1,4}$ -free co-comparability graphs.

Keywords: Biclique graphs, Interval bigraphs, Circular-arc bigraph.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Intervalos fechados e suas representações num modelo bipartido de intervalos . .	14
2.2	Intervalos aberto e fechado e suas representações num modelo bipartido de intervalos	15
2.3	Intervalos abertos e fechados e suas representações como modelo bipartido de intervalos	15
2.4	Modelo bipartido arco-circular	16
2.5	Modelo bipartido de intervalos	17
2.6	Modelo bipartido arco-circular e seu grafo bi-arco-circular	17
4.1	Representação do exemplo de modelo bipartido de intervalos	24
4.2	Modelo bipartido arco-circular com algum arco cujo evento de fim sempre ocorre antes de seu evento de início	32
5.1	Separação dos intervalos em conjuntos R , S e F e pelas partes $A(M)$ e $B(M)$. .	42
5.2	Conjuntos de intervalos R e S formam uma biclique	43
5.3	Escolha de intervalos que, respectivamente, não formam e podem formar biclique	43
5.4	Subconjuntos $X(d) \cap A(M)$ e $Y(d) \cap B(M)$ impedem a formação de uma biclique	44
6.1	Identificação dos eventos da notação α - β numa biclique.	58
6.2	Biclique com eventos mais internos e mais externos do mesmo tipo que são os mesmos em uma de suas partes.	58
6.3	Vão de uma biclique	61
6.4	Centro de uma biclique	61
6.5	Intervalo que intersecta centro na parte contrária de uma biclique.	63
6.6	Intervalo que intersecta o vão de uma biclique pela mesma parte	64
6.7	Intervalo que intersecta o vão de uma biclique pela mesma parte também intersecta o centro da parte contrária	65

6.8	Intervalo que cobre o centro de uma biclique da mesma parte	65
6.9	Intervalo que cobre o centro de uma biclique pela mesma parte intersecta o centro da parte contrária	66
6.10	Intervalo que cobre o centro de uma biclique pela mesma parte também cobre o vão da parte contrária	67
6.11	Evento $\beta_f^+(b_2)$ que ocorre antes do centro em $A(M)$ de b_1	68
6.12	Evento $\beta_s^+(b_2)$ que ocorre depois do centro em $A(M)$ de b_1	68
6.13	P_3 ocorre apenas em <i>diamantes</i> e <i>gemas</i> em grafos biclique	77
7.1	Modelo bipartido de intervalos e seu grafo biclique correspondente, o qual contém um $K_{1,3}$ induzido	81
7.2	Modelo bipartido de intervalos e seu grafo biclique correspondente, o qual contém um C_4 induzido	82

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{NP}	Classe dos problemas computacionais de decisão polinomialmente verificáveis
O	Limitante assintótico superior
Ω	Limitante assintótico inferior
Θ	Limitante assintótico superior e inferior
o	Limitante assintótico estritamente superior
K_n	Grafo completo de n vértices
$K_{n,m}$	Grafo bipartido completo com partes de n e m vértices
P_n	Grafo caminho de n vértices
C_n	Grafo ciclo de n vértices
$\mathcal{I}(b)$	Intervalos da potencial biclique b
$a^*(b)$	Variável de controle do estado aberto-fechado para a lista da parte A da potencial biclique b
$b^*(b)$	Variável de controle do estado aberto-fechado para a lista da parte B da potencial biclique b
$\phi_s(M)[i..j]$	Conjunto de intervalos de M com eventos de início entre a i -ésima e a j -ésima posições de $\mathbb{E}(M)$
$\phi_f(M)[i..j]$	Conjunto de intervalos de M com eventos de fim entre a i -ésima e a j -ésima posições de $\mathbb{E}(M)$
\mathcal{B}_G	Conjunto das bicliques maximais do grafo G
\mathcal{B}_M	Conjunto das bicliques maximais do modelo M
$\mathcal{B}_M^*[i..j]$	Conjunto das bicliques maximais do modelo M formadas por apenas alguns dos intervalos que começam entre o i -ésimo e o j -ésimo eventos
$\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e)$	Índice do último evento de fim que ocorre antes de e ou 1 se nenhum evento de fim ocorre antes de e
$\alpha_s^+(b)$	Evento de início mais externo (mais à esquerda) da biclique b na parte A
$\alpha_s^-(b)$	Evento de início mais interno (mais à direita) da biclique b na parte A
$\beta_s^+(b)$	Evento de início mais externo (mais à esquerda) da biclique b na parte B
$\beta_s^-(b)$	Evento de início mais interno (mais à direita) da biclique b na parte B
$\alpha_f^+(b)$	Evento de fim mais externo (mais à direita) da biclique b na parte A
$\alpha_f^-(b)$	Evento de fim mais interno (mais à esquerda) da biclique b na parte A
$\beta_f^+(b)$	Evento de fim mais externo (mais à direita) da biclique b na parte B
$\beta_f^-(b)$	Evento de fim mais interno (mais à esquerda) da biclique b na parte B

SUMÁRIO

1	Introdução	11
1.1	Metodologia.	11
1.2	Contribuições	12
1.3	Organização	13
2	Definições e Notação.	14
3	Revisão Bibliográfica	19
4	Construção do Grafo Biclique	21
4.1	Potenciais Biclques e Sub-rotinas	21
4.2	Construindo a Lista de Potenciais Biclques	23
4.2.1	Exemplo de Execução.	24
4.3	Limpeza da Lista de Potenciais Biclques	26
4.3.1	Limpeza do Exemplo	29
4.4	Grafo Biclque.	30
4.5	Cálculo de Complexidade.	31
4.6	Adaptação para o Caso Bi-Arco-Circular.	32
5	Corretude do Algoritmo.	35
5.1	Notação ϕ	36
5.2	Acompanhando as Potenciais Biclques	37
5.3	Persistência das Potenciais Biclques	38
5.4	Composição das Potenciais Biclques.	40
5.4.1	Cadeia de Potenciais Biclques de Interesse	40
5.4.2	Potenciais Biclques sem Intervalos que Terminaram	40
5.4.3	Potenciais Biclques com Intervalos que Terminaram	42

5.5	Invariante de Laço	49
5.5.1	Prova do Passo	50
6	Grafos de Co-comparabilidade	56
6.1	Notação α - β	57
6.2	Identidades de Bicliques	59
6.3	Vãos e Centros	60
6.4	Propriedades de Bicliques Maximais	63
6.5	Separadores de Bicliques	67
6.6	Ordenações de Bicliques Disjuntas	70
6.7	Caracterização dos Grafos Biclique.	75
7	Subgrafos Proibidos e Permitidos	78
7.1	Subgrafos Proibidos.	78
7.2	Subgrafos Permitidos	81
8	Conclusão	83
8.1	Trabalhos Futuros	83
	Referências	85
	Apêndice A: Implementação do algoritmo de listagem de bicliques maximais	87
A.1	Implementação da Listagem de Bicliques	87
A.1.1	Entrada correspondente ao exemplo apresentado na Seção 4.2.1.	89
A.1.2	Entrada para um exemplo que induz um $K_{1,3}$ em seu grafo biclique	89
A.1.3	Entrada para um exemplo que induz um C_4 em seu grafo biclique.	89

1 Introdução

Este documento contém a descrição dos estudos das propriedades de bicliques maximais de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares, assim como grafos biclique dessas classes de grafos.

O trabalho de Groshaus e Szwarcfiter (2010) descreve algumas caracterizações para algumas subclasses de grafos biclique, isto é, grafos de intersecção de subgrafos bipartidos completos maximais induzidos. Entretanto, tais caracterizações ainda não levam a um algoritmo polinomial de reconhecimento para a classe dos grafos biclique de todos os grafos. Com o propósito de expandir do que é conhecido sobre classes de grafos biclique, investigamos as bicliques maximais de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares.

Como subclasses dos grafos biclique de todos os grafos, caracterizar os grafos biclique de grafos de bi-intervalos e de grafos bi-arco-circulares nos permite melhor compreensão da organização e estrutura de sua superclasse. Melhor entendimento das classes mencionadas permite construir mais relações entre elas e todas demais classes de grafos, facilitando a busca por soluções para os diversos tipos de problemas computacionais e por propriedades para os diversos tipos de modelos teóricos.

O ramo da biologia oferece aplicações de encontrar bicliques maximais em grafos de interação proteína-proteína, como as estudadas por Bu et al. (2003) e Li et al. (2007). Nagarajan e Kingsford (2008) apresentam aplicações de enumeração de bicliques maximais no ramo da medicina e Atluri et al. (2010) apresentam uma aplicação no ramo da genética. Em redes sociais, o problema é aplicável na exploração de comunidades *web*, como apresentado por Kumar et al. (1999). Haemers (2001) apresenta uma aplicação do problema no ramo da teoria da informação.

1.1 Metodologia

Para a investigação de propriedades de bicliques das classes de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares, optamos por estudar diretamente seus respectivos modelos bipartidos em vez de seus grafos. Os modelos bipartidos de intervalos e arco-circulares contêm informações de ordem de ocorrência de eventos de intervalos, as quais não são diretamente obtidas a partir dos grafos.

Ao longo deste documento, adotamos o uso de biclique para também nos referirmos ao conjunto de intervalos de um modelo bipartido (de intervalos ou arco-circulares) que representam vértices que induzem um grafo bipartido completo em seu respectivo grafo de intersecção.

O trabalho de Müller (1997) descreve um algoritmo de reconhecimento de grafos de bi-intervalos baseado em reconstruir, recursivamente, modelos bipartidos de intervalos, o que nos garante que propriedades de bicliques de grafos bi-intervalos descritas em termos de conjuntos

de intervalos do modelo bipartido também valham quando descritos em termos de conjuntos de vértices em grafos.

Descrevemos um algoritmo para listar as bicliques maximais de um grafo de bi-intervalos a partir de um modelo bipartido de intervalos que o representa. Esse algoritmo, que também usamos como base para a geração de grafos biclique, nos serve como instrumento de familiarização das bicliques de grafos de bi-intervalos, permitindo compreender melhor suas propriedades. Entretanto, uma prova da corretude do algoritmo, a qual apresentamos neste documento, é essencial para validarmos qualquer propriedade de bicliques encontrada por tal meio.

Para simplificarmos a descrição das propriedades de bicliques que documentamos, definimos uma notação que nos permite simplificar a descrição de conceitos que apresentamos ao longo do trabalho e nos permite uma forma de manipularmos algebricamente tais conceitos. Tal notação nos serve como instrumento de inferência das propriedades encontradas que, então, apresentamos.

Embora alguns trabalhos sobre bicliques em grafos as definem como subconjunto de vértices que induzem um bipartido completo maximal, optamos por definir bicliques, no contexto de grafos, apenas como subconjuntos de vértices que induzem um bipartido completo, sem levar em consideração a propriedade de maximalidade. Tal distinção nos é útil para apresentarmos algumas das propriedades que nos levam a caracterização da classe de grafos biclique de grafos de bi-intervalos, a qual apresentamos neste documento. Deixamos explícito se quisermos nos referir apenas às bicliques maximais.

1.2 Contribuições

Nosso estudo nos leva a um algoritmo de listagem de bicliques maximais de grafos de bi-intervalos a partir dos modelos bipartidos de intervalos que os representam e uma adaptação para o caso de grafos bi-arco-circulares. Entretanto, temos a prova de corretude apenas para o caso de bi-intervalos.

A complexidade de tempo da listagem das bicliques maximais pelo algoritmo apresentado é de $O(kn^2)$, onde n é o número de intervalos do modelo de entrada e k é o tamanho da lista de subconjuntos de intervalos gerada pelo algoritmo durante sua execução. Entretanto, o valor de k é difícil de prever e acreditamos que seja exponencial a n .

A prova de corretude do algoritmo estudado nos oferece melhor compreensão da organização e estrutura de bicliques maximais de grafos de bi-intervalos quando as tratamos como conjuntos de intervalos de modelos bipartidos admitidos pelos grafos como modelos de intersecção. A notação e os argumentos usados durante a prova nos oferecem métodos de análise de modelos de intervalos semelhantes ao que estudamos, permitindo que os resultados apresentados possam servir para tópicos além do que abordamos.

Mostramos, também, que grafos biclique de grafos de bi-intervalos são grafos de co-comparabilidade que não admitem um $K_{1,4}$ como subgrafo induzido através de propriedades estruturais de bicliques em modelos bipartidos de intervalos descobertas ao longo do estudo. Também introduzimos os conceitos de *vão* e *centro* das bicliques e provamos propriedades que dizem respeito à interação dessas estruturas internas de bicliques com intervalos e outras bicliques. Tais conceitos nos permitem expandir o que é conhecido sobre caracterização de grafos biclique de grafos de bi-intervalos.

Durante os estudos da classe dos grafos biclique de grafos de bi-intervalos, havia uma suspeita de que fosse subclasse dos grafos de intervalos. Como a classe de intervalos é equivalente a classe dos grafos de co-comparabilidade que não admitem C_4 como subgrafo induzido, provado por Gilmore e Hoffman (1964), investigamos se os grafos bicliques de bi-intervalos seriam subclasse dos grafos de co-comparabilidade e dos grafos livres de C_4 . Entretanto, embora tenhamos provado que esses grafos biclique são de co-comparabilidade, descobrimos que a classe contém alguns grafos com C_4 induzido.

Mostramos exemplos de modelos bipartidos de intervalos que nos levam a grafos biclique, de seus respectivos grafos de bi-intervalos, que admitem $K_{1,3}$ e C_4 como subgrafos induzidos. Com o exemplo que admite C_4 como subgrafo induzido, mostramos que a classe de grafos biclique de grafos de bi-intervalos não está contida na classe dos grafos de intervalos.

1.3 Organização

No Capítulo 2, apresentamos as definições e notação usadas para introduzirmos os tópicos abordados em nosso estudo. No Capítulo 3, fazemos uma revisão dos estudos relacionados a bicliques em grafos, grafos biclique, grafos de bi-intervalos e grafos bi-arco-circulares. No Capítulo 4, apresentamos o algoritmo de listagem de bicliques maximais em grafos de bi-intervalos a partir de um modelo bipartido de intervalos correspondente, a geração do grafo biclique a partir das bicliques maximais encontradas pelo algoritmo, uma análise do algoritmo e uma adaptação para o caso bi-arco-circular. No Capítulo 5, apresentamos a prova de corretude do algoritmo através de alguns teoremas que provamos ao decorrer do capítulo. No Capítulo 6, definimos a notação α - β para descrevermos propriedades de bicliques em modelos bipartidos de intervalos, introduzimos os conceitos de *vãos* e *centros* em bicliques e apresentamos a prova de que todo grafo biclique de grafo de bi-intervalos é grafo de co-comparabilidade através de resultados referentes a propriedades estruturais das bicliques em modelos bipartidos de intervalos. No Capítulo 7, apresentamos a prova de que grafos biclique de grafos de bi-intervalos não admitem um $K_{1,4}$ como subgrafo induzido através de algumas das propriedades encontradas no capítulo anterior. Também apresentamos um exemplo de que existe um grafo biclique de um grafo de bi-intervalos que possui um $K_{1,3}$ como subgrafo induzido e outro exemplo que possui um C_4 como subgrafo induzido.

2 Definições e Notação

Os modelos bipartidos de intervalos e bipartidos arco-circulares são descrições formais de, respectivamente, intervalos numa reta e arcos numa circunferência onde cada intervalo (ou arco) pertence a um de dois possíveis conjuntos, os quais chamamos de *partes*. Por simplicidade, chamamos também arcos de intervalos, como uma interpretação de arcos como “intervalos angulares”.

Essa descrição leva em consideração apenas informações de natureza topológica para inferirmos se a intersecção entre dois intervalos é vazia ou não. Uma simples forma de descrevermos é pela distribuição dos extremos de cada intervalo.

Assumindo uma ordem para interpretação de cada um dos dois extremos de cada intervalo, podemos chamá-los de eventos de início e de fim. Assim, sabemos que, se qualquer tipo de evento de um intervalo ocorre após o evento de início e antes do evento de fim de algum outro intervalo, temos que ambos intervalos se intersectam.

Embora a noção de “intervalo aberto” e “intervalo fechado” seja relevante para descrevermos intersecções, podemos simplificar essa noção usando apenas a ordem em que os eventos de início de fim ocorrem.

Assumindo um modelo com intervalos abertos e fechados, se um evento de início aberto ocorre simultaneamente a um evento de fim aberto, então a intersecção entre os intervalos é vazia.

Se, nesse modelo, um evento de fim fechado ocorre simultaneamente a um evento de início fechado, então existe intersecção não vazia e, portanto, existe intersecção não-vazia entre os respectivos intervalos. Se, em vez de ambos os eventos serem fechados, um dos eventos for fechado e outro for aberto, então a intersecção entre eles é vazia.

A Figura 2.1 ilustra o exemplo do caso onde há eventos de início e fim fechados que ocorrem simultaneamente e como seria representado num modelo onde existe uma ordem total entre os eventos dos intervalos. Note que a intersecção entre os intervalos não é vazia em ambos os modelos.

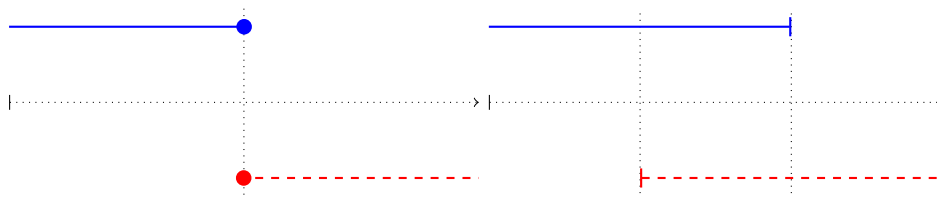


Figura 2.1: Intervalos fechados e suas representações num modelo bipartido de intervalos

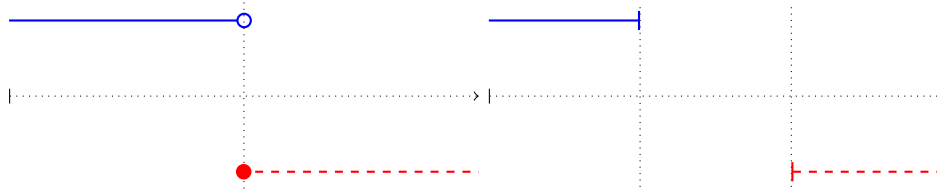


Figura 2.2: Intervalos aberto e fechado e suas representações num modelo bipartido de intervalos

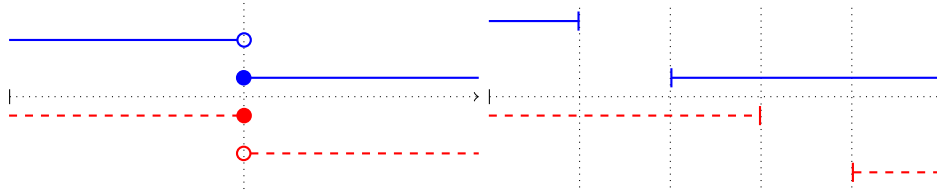


Figura 2.3: Intervalos abertos e fechados e suas representações como modelo bipartido de intervalos

A Figura 2.2 ilustra o exemplo do caso onde há um evento de fim aberto e um evento de início fechado que ocorrem simultaneamente e como seria representado num modelo onde existe uma ordem total entre os eventos dos intervalos. Note que a intersecção entre os intervalos é vazia em ambos os modelos.

Podemos descrever uma regra geral de como representar os intervalos de um modelo que admite intersecções simultâneas com intervalos abertos e fechados num modelo onde todas as extremidades dos intervalos são totalmente ordenadas. Basta separar cada região com eventos que ocorrem simultaneamente em quatro grupos de eventos. Eventos abertos pertencem aos grupos mais externos, com eventos de fim ao grupo mais à esquerda e eventos de início ao grupo mais à direita. Eventos fechados ocorrem nos grupos mais internos, com eventos de fim ao grupo à direita e eventos de início ao grupo à esquerda. Em cada grupo, basta assumir uma ordem arbitrária entre seus eventos.

A Figura 2.3 ilustra o exemplo de transformação dos eventos simultâneos em eventos totalmente ordenados. Eventos são separados em quatro grupos pelo critério de alocação descrito acima e as informações sobre as intersecções são preservadas pela transformação.

Como não é necessário lidar com intervalos abertos e fechados ou definir um modelo onde eventos podem ocorrer simultaneamente, podemos adotar um modelo de intervalos onde a ordem de ocorrência de eventos é total.

Podemos associar cada tipo de evento a um valor para sua interpretação, como 0 para “início” e 1 para “fim”, e a seu respectivo intervalo. Sejam as partes A e B de nosso modelo M , podemos definir o conjunto dos eventos de início e de fim de seus intervalos como $\{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$.

Por fim, podemos diferenciar modelos bipartidos de intervalos numa reta de um modelo bipartido de arcos numa circunferência pela existência de um evento de fim de algum intervalo, ou arco, que ocorre antes de seu respectivo início. Se algum evento de fim antecede seu respectivo evento de início, podemos interpretar como um arco que contém todos os eventos antes de seu fim e todos os eventos depois de seu início, como se o início e o fim da ordem de eventos do modelo estivessem contidos pelo arco. Assim, podemos descrever um modelo bipartido de intervalos numa reta como um caso especial de modelo bipartido arco-circular onde seus intervalos podem ser projetados numa reta.

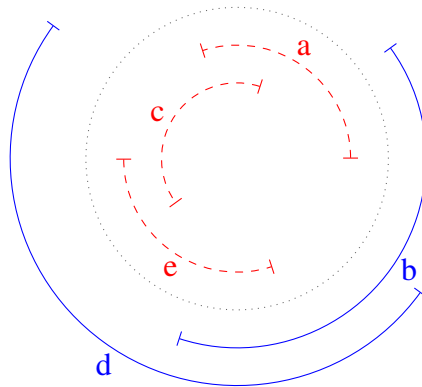


Figura 2.4: Modelo bipartido arco-circular

Tendo em mente os conceitos básicos do funcionamento desses modelos, podemos, de fato, descrevê-los formalmente.

Definição 1. Um *modelo bipartido arco-circular* M é uma tripla (A, B, \mathbb{E}) onde A e B são conjuntos finitos disjuntos de intervalos entre si, as partes, e \mathbb{E} é uma ordenação total do conjunto de eventos dos intervalos de A e B . Denotamos as componentes A , B e \mathbb{E} do modelo M por, respectivamente, $A(M)$, $B(M)$ e $\mathbb{E}(M)$.

Para as seguintes definições, considere um modelo bipartido arco-circular M qualquer.

Definição 2. Os elementos do conjunto $\{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$ são chamados de *eventos*. Eventos que pertencem a $\{0\} \times (A(M) \cup B(M))$ são chamados de *eventos de início* e eventos que pertencem a $\{1\} \times (A(M) \cup B(M))$ são chamados de *eventos de fim*.

Para um intervalo $d \in (A(M) \cup B(M))$, denotamos por s_d o evento de início de d e por f_d o evento de fim de d , isto é, $s_d = (0, d)$ e $f_d = (1, d)$.

Definição 3. Sejam dois eventos e e e' de $\{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$, denotamos o fato de que e ocorre antes de e' na ordenação $\mathbb{E}(M)$ por $e <_{\mathbb{E}(M)} e'$ e de que e ocorre depois de e' em $\mathbb{E}(M)$ por $e >_{\mathbb{E}(M)} e'$. Denotamos por $e \leq_{\mathbb{E}(M)} e'$ o fato de e ocorrer antes de e' ou ambos e e e' se referirem ao mesmo evento. De maneira similar, denotamos por $e \geq_{\mathbb{E}(M)} e'$ o fato de e ocorrer depois de e' ou ambos e e e' se referirem ao mesmo evento.

Definição 4. Dizemos que o modelo bipartido arco-circular M é um *modelo bipartido de intervalos* se, para todo intervalo, seu evento de início ocorre antes de seu evento de fim, isto é, se $s_d <_{\mathbb{E}(M)} f_d$, para todo intervalo $d \in (A(M) \cup B(M))$.

A Figura 2.4 é um exemplo da representação visual de um modelo bipartido arco-circular definido por $A(M) = \{b, d\}$, $B(M) = \{a, c, e\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_a, f_b, s_c, f_a, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$. Intervalos de $A(M)$ estão representados em arcos contínuos e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado. Eventos de M são representados em ordem anti-horária em torno da circunferência.

A Figura 2.5 é um exemplo da representação visual de um modelo bipartido de intervalos definido por $A(M) = \{b, d, f, h, j\}$, $B(M) = \{a, c, i, e, g\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_a, s_b, f_a, s_h, s_c, f_b, s_i, s_d, f_h, f_c, s_e, s_j, f_i, f_d, s_f, f_e, f_j, s_g, f_f, f_g)$. Intervalos de $A(M)$ estão representados em segmentos contínuos e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado.

Um modelo bipartido, de intervalos ou arco-circular, é dito *próprio* se nenhum intervalo está propriamente contido em algum intervalo da mesma parte.

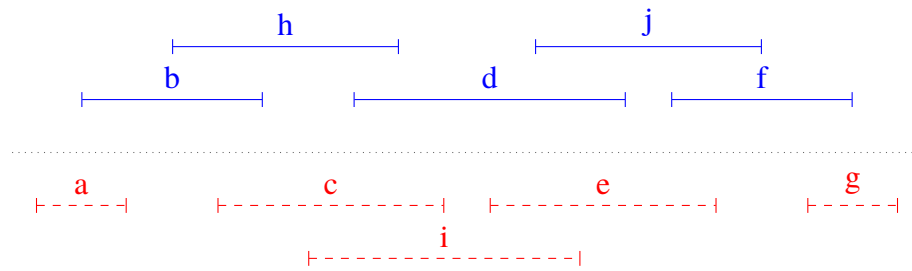


Figura 2.5: Modelo bipartido de intervalos

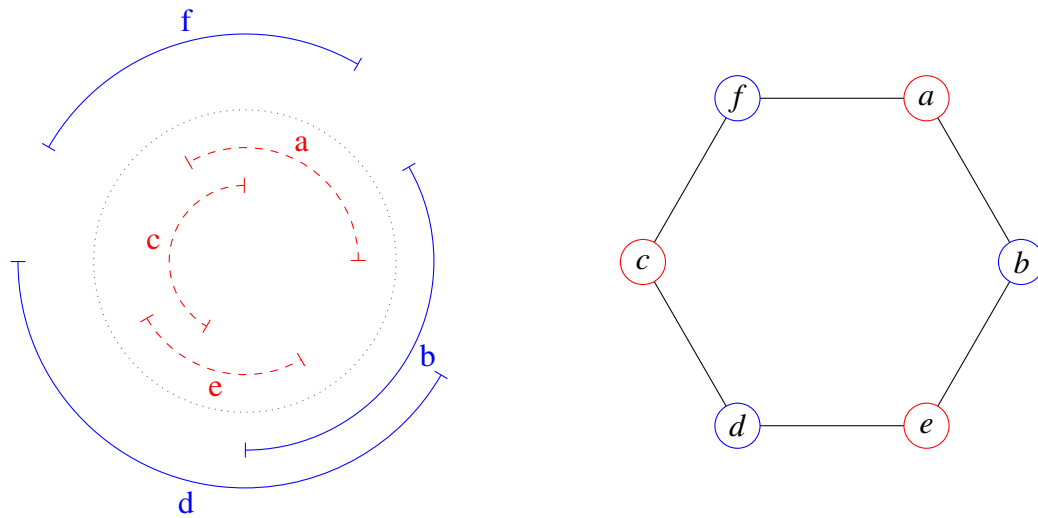


Figura 2.6: Modelo bipartido arco-circular e seu grafo bi-arco-circular

Os grafos de intersecção de modelos bipartidos arco-circulares e de intervalos são grafos bipartidos tais que cada vértice representa um intervalo e dois vértices compartilham uma aresta se, e somente se, seus respectivos intervalos possuem intersecção não-vazia e são de diferentes partes.

As seguintes definições formalizam os conceitos de tais grafos e da notação usada para descrevê-los.

Definição 5. Seja um grafo não-direcionado $G = (V, E)$. Denotamos por $V(G)$ o conjunto de vértices V de G e denotamos por $E(G)$ o conjunto de arestas E de G .

Definição 6. Seja um grafo não-direcionado G . Dizemos que G é *grafo bi-arco-circular* se existe um modelo bipartido arco-circular M tal que existe uma bijeção $\pi : (A(M) \cup B(M)) \rightarrow V(G)$ onde, para todo par de intervalos $a, b \in (A(M) \cup B(M))$, a aresta $\{\pi(a), \pi(b)\}$ pertence a $E(G)$ se, e somente se, o intervalo a pertence a parte $A(M)$, o intervalo b pertence a $B(M)$ e existe uma intersecção não-vazia entre a e b no modelo M .

Definição 7. Seja um grafo bi-arco-circular G . Dizemos que G é *grafo de bi-intervalos* se G admite um modelo bipartido de intervalos como modelo de intersecção.

A Figura 2.6 é um exemplo de grafo bi-arco-circular e seu modelo bipartido arco-circular definido por $A(M) = \{b, d, f\}$, $B(M) = \{a, c, e\}$ e $E(M) = (s_a, f_b, s_f, s_c, f_a, f_f, s_d, s_e, f_c, s_b, f_e, f_d)$. Intervalos de $A(M)$ estão representados em arcos contínuos e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado. Eventos de M são representados em ordem anti-horária em torno da circunferência.

As seguintes definições dizem respeito às bicliques, conjuntos de vértices de um grafo que induzem um bipartido completo, e aos grafos de intersecção das bicliques maximais de um grafo.

Definição 8. Sejam um grafo G e o conjunto $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $G[S]$ o subgrafo de G induzido pelo subconjunto de vértices S , isto é, o subgrafo de G composto pelos vértices em S e todas as arestas em G que conectam tais vértices.

Definição 9. Uma *biclique* de um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ onde $G[S]$ é bipartido completo, isto é, o conjunto S pode ser particionado em dois conjuntos independentes X e Y tais que $\{x, y\} \in E(G[S])$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Definição 10. Dizemos que a biclique S é *maximal* se não existe $v \in (V(G) \setminus S)$ tal que $S \cup \{v\}$ é biclique.

Definição 11. Denotamos o conjunto de todas bicliques maximais de G por \mathcal{B}_G .

Definição 12. Chamamos de *grafo biclique* de G o grafo de intersecção das bicliques maximais de G , isto é, um grafo H tal que existe uma bijeção $\pi : \mathcal{B}_G \rightarrow V(H)$ onde $\{\pi(S_1), \pi(S_2)\} \in E(H)$ se, e somente se, a intersecção $S_1 \cap S_2$ não for vazia, para todo $S_1, S_2 \in \mathcal{B}_G$. Denotamos o grafo biclique de G por $KB(G)$.

A motivação deste trabalho é o estudo da classe dos grafos biclique de grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares. Entretanto, estudar diretamente grafos de uma classe com caracterizações pouco triviais torna mais difícil a análise de suas bicliques maximais e, portanto, sobre seu grafo biclique. Como alternativa, definimos as classes dos grafos biclique de modelos bipartidos de intervalos e arco-circulares, que possuem a vantagem de dar mais informações de natureza topológica do que estudar seus respectivos grafos de intersecção.

As bicliques dos modelos são conjuntos de intervalos onde todo intervalo possui intersecção não-vazia com todos os intervalos da parte contrária. Da mesma forma que nos grafos, podemos definir as bicliques maximais e, por fim, os grafos biclique dos modelos.

Definimos a seguir a notação e as ideias envolvidas nos conceitos de grafos biclique de modelos bipartidos de intervalos e arco-circulares.

Definição 13. Uma *biclique* de um modelo bipartido de intervalos ou arco-circular M é um subconjunto de intervalos S do modelo tal que todo intervalo de $S \cap A(M)$ possui intersecção não-vazia em M com todos os intervalos de $S \cap B(M)$.

Definição 14. Dizemos que uma biclique S de um modelo bipartido de intervalos ou arco-circular M é *maximal* se não existe um intervalo d que não pertence a S tal que $S \cup \{d\}$ é biclique.

Definição 15. O conjunto de todas as bicliques maximais de um modelo bipartido de intervalos ou arco-circular M é denotado por \mathcal{B}_M .

3 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, apresentamos uma revisão de trabalhos relacionados a bicliques em grafos, grafos biclique e grafos de bi-intervalos e bi-arco-circulares.

Müller (1997) apresenta um algoritmo de complexidade $O(nm^6(n+m)\log n)$ para reconhecimento de grafos de bi-intervalos com n vértices e m arestas baseado em construir, recursivamente, um modelo bipartido de intervalos do grafo a partir de seus subgrafos. Müller (1997) também lista algumas estruturas proibidas em grafos de bi-intervalos. Hell e Huang (2004) apresentam caracterizações para grafos de bi-intervalos baseados em representações de modelos arco-circulares onde dois arcos não cobrem todo o círculo e outra em termos de ordenação de vértices, o qual acreditam que possa ser útil para a descoberta de algoritmos mais eficientes para grafos de bi-intervalos. Hell e Huang (2004) também provam que a classe dos grafos de bi-intervalos próprios é equivalente à classe dos grafos bipartidos de permutação, isto é, a classe dos grafos bipartidos que aceitam, como modelo de intersecção, cruzamentos entre segmentos de retas com extremos contidos em duas retas paralelas distintas. Basu et al. (2013) apresentam uma caracterização para grafos bi-arco-circulares em termos de grafos arco-circulares com vértices cobertos por, pelo menos, duas cliques e outra como união entre duas classes de grafos.

Prisner (2000) encontra um limitante superior de $(1.618034^n + o(1))n^{5/2}$ para o número de bicliques maximais num grafo de n vértices e $2^{n/2}$ para grafos bipartidos e, a partir dos resultados de Müller (1997), prova o limitante superior de $(|A||B|)^2$ bicliques maximais em grafos de bi-intervalos e um limitante polinomial para generalizações bipartidas de grafos de bi-intervalos, para as partes A e B do grafo. Gaspers, Kratsch e Liedloff (2012) melhoram o limitante de bicliques maximais em grafos quaisquer para $\Theta(3^{n/3})$.

Dawande et al. (2001) apresentam variações do problema da biclique máxima e mostram que encontrar a biclique com o maior número de vértices é polinomial para grafos bipartidos. Entretanto, Peeters (2003) mostra que decidir se existe uma biclique com, pelo menos, um certo número de arestas, é \mathcal{NP} -completo em grafos bipartidos. Dias, Figueiredo e Szwarcfiter (2007) provam que, dado um subconjunto de vértices S , decidir se existe uma biclique maximal onde uma de suas partes é igual a S é \mathcal{NP} -completo.

Algoritmos para listagem de bicliques maximais são amplamente estudados, como o algoritmo apresentado por Alexe et al. (2004) que, embora exponencial, admite variantes polinomiais para certas instâncias. Dias, Figueiredo e Szwarcfiter (2007), Makino e Uno (2004) propoem algoritmos polinomiais para certas classes de grafos. Eppstein (1994) apresenta um algoritmo linear parametrizado em função da arboricidade do grafo. Liu, Sim e Li (2006) propõem um algoritmo eficiente baseado na técnica de divisão-e-conquista e cortes do espaço de busca para a enumeração de bicliques maximais com grande número de vértices. Zhang et al. (2014) discutem algoritmos de listagem de bicliques maximais até então conhecidos e apresentam um algoritmo baseado em técnicas de mineração de dados.

Outros problemas foram estudados em relação às bicliques. Por exemplo, Groshaus e Szwarcfiter (2010) definem matrizes biclique de um grafo como matrizes $\{0, 1, -1\}$ com uma linha para cada biclique maximal e uma coluna para cada vértice, onde valores 1 e -1 são atribuídos a vértices adjacentes à biclique correspondente, e apresentam condições necessárias para que matrizes $\{0, 1, -1\}$ sejam matrizes biclique de algum grafo.

Grafos biclique são introduzidos por Groshaus e Szwarcfiter (2010) como grafos de intersecção das bicliques maximais induzidas de algum grafo. Groshaus e Szwarcfiter (2010) também apresentam condições para que certos grafos sejam grafos biclique de outros grafos, provando, também, caracterizações para grafos biclique, grafos biclique de bipartidos e provam as condições para que um P_3 , um caminho de três vértices, seja subgrafo induzido de algum grafo biclique. Porém, as caracterizações encontradas para grafos biclique e grafos biclique de bipartidos ainda levam a um algoritmo exponencial de reconhecimento.

4 Construção do Grafo Biclique

Neste capítulo, apresentamos o algoritmo para a geração do grafo biclique de grafos de bi-intervalos a partir de seus modelos bipartidos de intervalos. O algoritmo de geração é descrito através de três etapas, as quais são descritas em ordem pelas Seções 4.2, 4.3 e 4.4.

Na Seção 4.1, definimos a estrutura de dados a qual chamamos de “potencial biclique”, que é usada para armazenar intervalos que possam formar uma biclique maximal. Também definimos um conjunto de sub-rotinas que nos servirá para definir os algoritmos.

A primeira etapa, descrita pela Seção 4.2, é a construção da lista de potenciais bicliques do modelo. A construção usa como base uma estratégia de varredura sobre os eventos de início e fim. Os eventos são processados de acordo com a ordem de ocorrência de eventos definida pela componente \mathbb{E} do modelo, isto é, eventos que ocorrem antes de outros são processados primeiro.

A próxima etapa, descrita pela Seção 4.3, é a limpeza da lista de potenciais bicliques gerada pela primeira etapa. Como nem toda potencial biclique representa uma biclique maximal do modelo, é necessário remover as que não representam.

A última etapa, descrita pela Seção 4.4, é a geração do grafo biclique através da lista de bicliques maximais retornada pela etapa anterior. Nessa etapa, assume-se que toda biclique maximal do modelo está presente na lista. Logo, basta apenas gerar um grafo com o número de vértices igual ao tamanho da lista e conectar vértices se suas respectivas bicliques maximais possuem intersecção não-vazia entre si.

A Seção 4.5 apresenta uma análise do algoritmo em termos de sua complexidade de execução. Mostramos que, embora seja usada uma estratégia de varredura, o algoritmo não é eficiente.

No Apêndice A deste documento, apresentamos a implementação do algoritmo de listagem de bicliques maximais de modelos bipartidos de intervalos, descrita como as três primeiras etapas da geração do grafo biclique.

4.1 Potenciais Bicliques e Sub-rotinas

As “potenciais bicliques” são estruturas de dados usadas para armazenar intervalos que podem formar uma biclique maximal do modelo. A estrutura interna responsável por armazenar os intervalos pode ser implementada como uma lista. Entretanto, a inserção de intervalos ocorre apenas quando certas condições são cumpridas e cada potencial biclique pode ou não satisfazer tais condições. Para controlar quais potenciais bicliques podem receber mais intervalos durante a construção da lista de potenciais bicliques, cada potencial biclique contém variáveis que marcam quando é possível inserir novos intervalos.

As condições afetam apenas a inserção de intervalos de cada parte do modelo. Logo, são necessárias duas variáveis (ou *flags*) que marcam quando cada potencial biclique poderá receber intervalos de suas respectivas partes.

Podemos, então, definir as potenciais bicliques. Para as seguintes definições, considere o modelo bipartido de intervalos M de entrada.

Definição 16. Uma *potencial biclique* é uma tripla $b = (\mathcal{I}, a^*, b^*)$, onde \mathcal{I} é subconjunto do conjunto de intervalos $(A(M) \cup B(M))$ e $a^*, b^* \in \{0, 1\}$. Denotamos as componentes \mathcal{I}, a^*, b^* de b por, respectivamente, $\mathcal{I}(b), a^*(b)$ e $b^*(b)$.

Definição 17. Seja a potencial biclique b . Se $a^*(b) = 0$, dizemos que a potencial biclique b está *aberta para receber intervalos da parte $A(M)$* . Se $a^*(b) = 1$, dizemos que b está *fechada para receber novos intervalos da parte $A(M)$* . O mesmo pode ser dito em relação a $b^*(b)$ e à parte $B(M)$.

Definimos as sub-rotinas:

- **INSIRA(L, x):** Insere elemento x ao fim da lista L .
- **REMOVA(L, x):** Remove elemento x da lista L .
- **POTENCIAL_BICLIQUE():** Retorna uma potencial biclique b tal que seu conjunto de intervalos $\mathcal{I}(b)$ é vazio e ambas partes estão abertas para receber intervalos, isto é, retorna um b tal que $\mathcal{I}(b) = \emptyset, a^*(b) = 0, e b^*(b) = 0$.
- **INTERVALO_EVENTO(e):** Recebe um evento $e = (t, d) \in \{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$. Retorna o intervalo d relacionado ao evento e .
- **PARTE(e):** Recebe um evento $e = (t, d) \in \{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$. Retorna a parte a que o intervalo d pertence, podendo ser $A(M)$ ou $B(M)$.
- **CONTRARIA(p):** Recebe a parte p do modelo bipartido de intervalos M de entrada, podendo ser $A(M)$ ou $B(M)$. Retorna a parte contrária a p , isto é, retorna $B(M)$ se p é igual a $A(M)$ e vice-versa.
- **PARTE_ABERTA(b, p):** Recebe a potencial biclique b e a parte p de um modelo bipartido de intervalos M . Retorna o valor verdade VERDADEIRO se a parte p da potencial biclique b está aberta para receber novos intervalos de p , isto é, se $a^*(b)$ vale 0 quando p for igual a $A(M)$ ou se $b^*(b)$ vale 0 quando p for igual a $B(M)$. Caso o contrário, retorna o valor verdade FALSO.
- **FECHE_PARTE(b, p):** Recebe a potencial biclique b e a parte p de um modelo bipartido de intervalos M . Fecha a parte p da potencial biclique b para impedir que b receba novos intervalos de p , isto é, atribui o valor 1 a $a^*(b)$ se p for igual a $A(M)$ ou atribui o valor 1 a $b^*(b)$ se p for igual a $B(M)$.
- **COPIE(b):** Recebe uma potencial biclique b . Retorna uma cópia independente de b .

4.2 Construindo a Lista de Potenciais Biclíques

A primeira etapa da geração do grafo biclique de um modelo bipartido de intervalos é a geração de uma lista de potenciais biclíques. Como mencionado, a geração da lista é feita usando como base uma varredura dos eventos de início e fim dos intervalos do modelo, seguindo pela sua ordem de ocorrências de eventos.

Algoritmo 1 Geração da lista de potenciais biclíques

Entrada: Modelo bipartido de intervalos M

Saída: Lista de potenciais biclíques contendo biclíques maximais de M

```

1: Função BIVSWEEPLINE( $M$ )
2:   Lista  $L$ 
3:   INSIRA( $L$ , POTENCIAL_BICLIQUE())
4:   Para  $e \in \mathbb{E}(M)$  :
5:     Intervalo  $d \leftarrow$  INTERVALO_EVENTO( $e$ )
6:      $p \leftarrow$  PARTE( $d$ )
7:     Se  $e = s_d$  então:
8:       Para  $b \in L$  :
9:         Se PARTE_ABERTA( $b, p$ ) então:
10:           $I(b) \leftarrow I(b) \cup \{d\}$ 
11:       Senão ▷  $e = f_d$ 
12:         Para  $b \in L$  :
13:           Se  $d \in I(b)$  então:
14:              $b' \leftarrow$  COPIE( $b$ )
15:             FECHER_PARTE( $b$ , CONTRARIA( $p$ ))
16:              $I(b') \leftarrow I(b') \setminus \{d\}$ 
17:             INSIRA( $L$ ,  $b'$ )
18:   Retorne  $L$ 

```

Descrevemos o processo de geração da lista de potenciais biclíques a partir de um modelo bipartido de intervalos M dado como entrada pelo Algoritmo 1. A lista começa contendo uma potencial biclique sem intervalos e aberta para receber novos intervalos. Para cada evento $e \in \{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$ lido pela ordem de ocorrência descrita por $\mathbb{E}(M)$, escolhemos que tipo de processamento sobre a lista fazemos com base no tipo de evento e .

Se e for evento de início, inserimos o intervalo relativo ao evento e em todas as potenciais biclíques da lista que estão abertas para receber intervalos da parte a qual e pertence.

Se e for evento de fim, percorremos a lista de potenciais biclíques pela ordem de inserção na lista. Para cada potencial biclique b que contém o intervalo relacionado com o evento e , fazemos uma cópia independente b' e removemos tal intervalo de b' . Na potencial biclique b , fechamos a parte contrária a parte a qual o intervalo relacionado ao evento e pertence, isto é, se $e = f_d$, para o intervalo d do modelo M , atribuímos o valor 1 a $b^*(M)$ se d pertence a $A(M)$ ou atribuímos 1 a $a^*(M)$ se d pertence a $B(M)$. A potencial biclique b' gerada é, então, inserida ao fim da lista de potenciais biclíques.

Ao fim de todas as iterações, a lista de potenciais biclíques é, então, retornada.

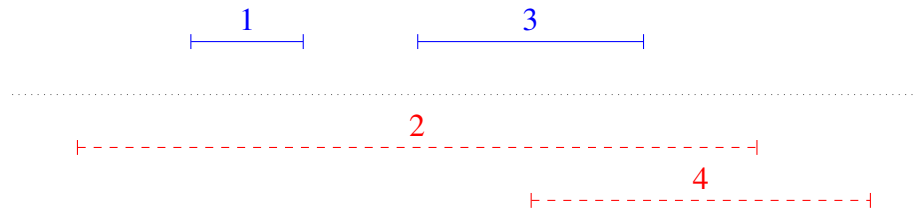


Figura 4.1: Representação do exemplo de modelo bipartido de intervalos

4.2.1 Exemplo de Execução

Considere o modelo bipartido de intervalos M como entrada para o Algoritmo 1 tal que $A(M) = \{1, 3\}$, $B(M) = \{2, 4\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_2, s_1, f_1, s_3, s_4, f_3, f_2, f_4)$.

A Figura 4.1 ilustra o modelo M . Intervalos de $A(M)$ estão representados por segmentos contínuos e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado.

A lista de potenciais bicliques L começa com uma potencial biclique sem intervalos e aberta para receber intervalos em ambas as partes. Vamos nos referir a primeira potencial biclique da lista por $L[0]$. Temos que

$$L[0] \leftarrow (\emptyset, 0, 0).$$

Como M possui oito eventos, o laço é executado oito vezes. Seguindo a ordem de ocorrência dos eventos descrita por $\mathbb{E}(M)$, temos que o primeiro valor de e é s_2 .

Iteração 1: ($e = s_2$) O intervalo 2 pertence a $B(M)$. Como $L[0]$ é a única potencial biclique da lista L e ela está aberta para receber intervalos de $B(M)$, temos que, ao final da execução da primeira iteração do laço principal do algoritmo, o intervalo 2 é inserido em $L[0]$. Temos que

$$L[0] \leftarrow (\{2\}, 0, 0).$$

Iteração 2: ($e = s_1$) O intervalo 1 pertence a $A(M)$. A potencial biclique $L[0]$ está aberta para receber novos intervalos de $A(M)$. Temos, então, que o intervalo 1 é inserido em $L[0]$. Temos que

$$L[0] \leftarrow (\{2, 1\}, 0, 0).$$

Iteração 3: ($e = f_1$) O intervalo 1 pertence a $A(M)$. A lista L contém apenas a potencial biclique $L[0]$ e, como $1 \in \mathcal{I}(L[0])$, geramos uma cópia de $L[0]$ que chamamos de $L[1]$ e removemos o intervalo 1 de $L[1]$. Fechamos a parte contrária da parte a qual 1 pertence em $L[0]$, isto é, atribuímos 1 a $b^*(L[0])$. Logo, temos que

$$L[0] \leftarrow (\{2, 1\}, 0, 1)$$

$$L[1] \leftarrow (\{2\}, 0, 0).$$

Note que a cópia foi feita antes de atribuir 1 a $b^*(L[0])$. Portanto, temos que $b^*(L[1])$ ainda vale 0, isto é, a potencial biclique $L[1]$ está aberta para receber novos intervalos de $B(M)$.

Iteração 4: ($e = s_3$) O intervalo 3 pertence a $A(M)$. Tanto $L[0]$ quanto $L[1]$ estão abertos para receber novos intervalos de $A(M)$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} L[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 0, 1) \\ L[1] &\leftarrow (\{2, 3\}, 0, 0). \end{aligned}$$

Iteração 5: ($e = s_4$) O intervalo 4 pertence a $B(M)$. Apenas a potencial biclique $L[1]$ está aberta para receber novos intervalos de $B(M)$. O intervalo 4 é, então, inserido apenas em $L[1]$. Temos que

$$\begin{aligned} L[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 0, 1) \\ L[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 0, 0). \end{aligned}$$

Iteração 6: ($e = f_3$) O intervalo 3 pertence a $A(M)$. Tanto $L[0]$ quanto $L[1]$ possuem o intervalo 3. A potencial biclique $L[0]$ dá origem à potencial biclique $L[2]$, a qual é uma cópia da qual se remove o intervalo 3. A potencial biclique $L[0]$ já está fechada para receber novos intervalos de $B(M)$. Portanto, o valor de $b^*(L[0])$ continua valendo 1.

A potencial biclique $L[1]$ dá origem à potencial biclique $L[3]$, que é a cópia de $L[1]$ sem o intervalo 3. A potencial biclique $L[1]$ é, então, fechada para receber novos intervalos de $B(M)$.

Temos que

$$\begin{aligned} L[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 0, 1) \\ L[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 0, 1) \\ L[2] &\leftarrow (\{2, 1\}, 0, 1) \\ L[3] &\leftarrow (\{2, 4\}, 0, 0). \end{aligned}$$

Iteração 7: ($e = f_2$) O intervalo 2 pertence a $B(M)$. Como todas as potenciais bicliques de L contêm o intervalo 2, temos que é feita uma cópia dessas quatro potenciais bicliques, removendo o 2 de cada cópia. Das quatro potenciais bicliques originais, todas são fechadas para receber novos intervalos de $A(M)$. Temos que

$$\begin{aligned} L[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 1, 1) \\ L[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 1, 1) \\ L[2] &\leftarrow (\{2, 1\}, 1, 1) \\ L[3] &\leftarrow (\{2, 4\}, 1, 0) \\ L[4] &\leftarrow (\{1, 3\}, 0, 1) \\ L[5] &\leftarrow (\{3, 4\}, 0, 1) \\ L[6] &\leftarrow (\{1\}, 0, 1) \\ L[7] &\leftarrow (\{4\}, 0, 0). \end{aligned}$$

Como apresentado, as potenciais bicliques $L[0]$, $L[1]$, $L[2]$ e $L[3]$ dão origem a, respectivamente, $L[4]$, $L[5]$, $L[6]$ e $L[7]$. Cada cópia é feita antes de sua original ser fechada para receber novos intervalos de $A(M)$. Logo, as cópias ainda estão abertas para receber novos intervalos de $A(M)$.

Iteração 8: ($e = f_4$) O intervalo 4 pertence a $B(M)$. Apenas as potenciais bicliques $L[1]$, $L[3]$, $L[5]$ e $L[7]$ contêm o intervalo 4. Seguindo a regra, para cada potencial biclique mencionada, é feita uma cópia que não contém o intervalo 4 e as originais são fechadas para receber novos intervalos da parte $A(M)$.

$$\begin{aligned}
L[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 1, 1) \\
L[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 1, 1) \\
L[2] &\leftarrow (\{2, 1\}, 1, 1) \\
L[3] &\leftarrow (\{2, 4\}, 1, 0) \\
L[4] &\leftarrow (\{1, 3\}, 0, 1) \\
L[5] &\leftarrow (\{3, 4\}, 1, 1) \\
L[6] &\leftarrow (\{1\}, 0, 1) \\
L[7] &\leftarrow (\{4\}, 1, 0) \\
L[8] &\leftarrow (\{2, 3\}, 1, 1) \\
L[9] &\leftarrow (\{2\}, 1, 0) \\
L[10] &\leftarrow (\{3\}, 0, 1) \\
L[11] &\leftarrow (\emptyset, 0, 0).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

As potenciais bicliques $L[1]$, $L[3]$, $L[5]$ e $L[7]$ dão origem a, respectivamente, $L[8]$, $L[9]$, $L[10]$ e $L[11]$.

A lista de potenciais bicliques L é, então, retornada pelo algoritmo.

4.3 Limpeza da Lista de Potenciais Bicliques

Após a conclusão da primeira etapa, é necessário remover da lista as potenciais bicliques que não são maximais ou que não possuem intervalo de alguma das partes. Descrevemos essa remoção pelos dois algoritmos apresentados nesta seção.

O primeiro algoritmo pode receber a lista de potenciais bicliques retornada pela primeira etapa e o segundo algoritmo recebe a lista retornada pelo primeiro algoritmo, assim como o segundo algoritmo pode receber a lista da etapa anterior e o primeiro algoritmo recebe a lista retornada pelo segundo algoritmo. Por simplicidade, vamos assumir a primeira ordem sugerida.

O Algoritmo 2 recebe a lista de potenciais bicliques L retornada pelo Algoritmo 1 e uma referência ao modelo M de entrada. O algoritmo retorna uma lista de potenciais bicliques que contêm intervalos que formam bicliques, isto é, remove as potenciais bicliques que possuem alguma de suas partes vazia.

Um vetor binário r de tamanho $|L|$ é inicializado com 0 em todas as posições. Esse vetor indica quais potenciais bicliques estão marcadas para remoção ao fim do algoritmo.

Algoritmo 2 Remoção de potenciais bicliques que não contêm bicliques

Entrada: Lista de potenciais bicliques L e referência ao modelo bipartido de intervalos M .

Saída: Lista de potenciais bicliques que representam bicliques de M .

```

1: Função LIMPEZA( $L, M$ )
2:    $k \leftarrow |L|$ 
3:   Vetor  $r[1..k] \leftarrow (0, \dots, 0)$             $\triangleright$  Vetor de pot. bicliques marcadas para remoção
4:   Para  $l \in [1..k]$  :
5:      $cA \leftarrow 0$ 
6:      $cB \leftarrow 0$ 
7:     Para  $i \in \mathcal{I}(L[l])$  :
8:       Se  $i \in A(M)$  então:
9:          $cA \leftarrow 1$ 
10:      Senão
11:         $cB \leftarrow 1$ 
12:      Se  $cA = 0$  ou  $cB = 0$  então:
13:         $r[l] \leftarrow 1$ 
14:   Lista  $L'$ 
15:   Para  $i \in k$  :
16:     Se  $r[i] = 0$  então:
17:       INSIRA( $L', L[i]$ )
18:   Retorne  $L'$ 

```

Para toda potencial biclique $L[l]$ da lista, com $l \in [1..|L|]$, é feita uma verificação de quais partes possuem intervalos que estão em $\mathcal{I}(L[l])$. Se existe algum intervalo de $A(M)$ na potencial biclique, uma variável cA , inicialmente valorada com 0 no início de cada iteração do laço da linha 5, recebe o valor 1. O mesmo ocorre em relação a parte $B(M)$ e para a variável cB . Se ambas as variáveis cA e cB valem 1, a potencial biclique possui intervalos de ambas as partes. Caso o contrário, ela é marcada para remoção pela atribuição do valor 1 para a posição l do vetor r .

Ao fim da execução do algoritmo, é criada uma lista de potenciais bicliques L' que contém apenas potenciais bicliques de L que não são marcadas para remoção. A lista L' é, então, retornada pelo algoritmo.

O Algoritmo 3 recebe a lista de potenciais bicliques L retornada pelo Algoritmo 2 e uma referência ao modelo M de entrada. O algoritmo, então, retorna uma lista de potenciais bicliques que contêm intervalos que formam bicliques maximais no modelo.

Da mesma forma que o algoritmo anterior, é mantido um vetor r de tamanho $|L|$ que marca as potenciais bicliques não-maximais para remoção ao fim do algoritmo. Um vetor c de tamanho $|(A(M) \cup B(M))|$ também é inicializado com o valor 0 em todas suas posições. Esse vetor é usado para comparar se uma potencial biclique está contida em outra e toda posição representa um intervalo do modelo.

Para toda potencial biclique $L[l_1]$ que não está marcada para remoção, é feita uma comparação com toda potencial biclique $L[l_2]$ que também não está marcada para remoção, com $l_1, l_2 \in [1..|L|]$ e $l_1 \neq l_2$.

Em cada iteração do laço da linha 6, todas as posições do vetor c relacionadas com os intervalos de $\mathcal{I}(L[l_1])$ recebem o valor 1, indicando quais os intervalos estão presentes em $L[l_1]$. É, então, feita uma busca por alguma posição de c dentre as que representam os intervalos de

Algoritmo 3 Remoção de potenciais bicliques não-maximais

Entrada: Lista de potenciais bicliques L e referência ao modelo bipartido de intervalos M .

Saída: Lista de potenciais bicliques maximais

```

1: Função LIMPEZA( $L, M$ )
2:    $n \leftarrow |(A(M) \cup B(M))|$ 
3:    $k \leftarrow |L|$ 
4:   Vetor  $r[1..k] \leftarrow (0, \dots, 0)$             $\triangleright$  Vetor de pot. bicliques marcadas para remoção
5:   Vetor  $c[1..n] \leftarrow (0, \dots, 0)$           $\triangleright$  Vetor de comparação de potenciais bicliques
6:   Para  $l_1 \in [1..k]$  e  $r[l_1] = 0$  :
7:     Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_1])$  :
8:        $c[i] \leftarrow 1$ 
9:     Para  $l_2 \in [1..k]$  e  $l_1 \neq l_2$  e  $r[l_2] = 0$  :
10:       $contida \leftarrow 1$ 
11:      Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_2])$  :
12:        Se  $c[i] = 0$  então:
13:           $contida \leftarrow 0$ 
14:        Se  $contida = 1$  então:
15:           $r[l_2] \leftarrow 1$ 
16:      Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_1])$  :
17:         $c[i] \leftarrow 0$ 
18:   Lista  $L'$ 
19:   Para  $i \in k$  :
20:     Se  $r[i] = 0$  então:
21:       INSIRA( $L', L[i]$ )
22:   Retorne  $L'$ 

```

$\mathcal{I}(L[l_2])$. Se alguma das posições contém o valor 0, a potencial biclique $L[l_2]$ não está contida em $L[l_1]$. Caso o contrário, a posição l_2 do vetor r recebe o valor 1, marcando $L[l_2]$ para remoção. Antes do fim da iteração, as posições de c que receberam o valor 1 recebem o valor 0, limpando o vetor de comparação para a próxima iteração.

Ao fim da execução do algoritmo, é criada uma lista de potenciais bicliques L' que contém apenas potenciais bicliques de L que não são marcadas para remoção. A lista L' é, então, retornada pelo algoritmo.

Note que o algoritmo também remove duplicatas de potenciais bicliques, preservando uma das que se repetem na lista.

4.3.1 Limpeza do Exemplo

Vamos assumir o modelo bipartido de intervalos usado como exemplo de execução do algoritmo da seção anterior. Vamos assumir, também, a ordem sugerida na apresentação dos dois algoritmos da segunda etapa da geração do grafo biclique.

Considere a saída L do exemplo, descrita pela Equação 4.1.

As potenciais bicliques $L[4]$, $L[6]$ e $L[10]$ possuem apenas intervalos da parte $A(M)$, enquanto as potenciais bicliques $L[3]$, $L[7]$ e $L[9]$ possuem apenas intervalos da parte $B(M)$. A potencial biclique $L[11]$ não possui intervalo algum.

Seja L' a lista de potenciais bicliques retornada pelo Algoritmo 2. Ao fim da execução do algoritmo, a lista L' é descrita como

$$\begin{aligned} L'[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 1, 1) \\ L'[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 1, 1) \\ L'[2] &\leftarrow (\{2, 1\}, 1, 1) \\ L'[3] &\leftarrow (\{3, 4\}, 1, 1) \\ L'[4] &\leftarrow (\{2, 3\}, 1, 1). \end{aligned}$$

Os intervalos das potenciais bicliques $L'[2]$ e $L'[4]$ também pertencem a potencial biclique $L'[0]$. Assim como os intervalos das potenciais bicliques $L'[3]$ e $L'[4]$ também estão na potencial biclique $L'[1]$.

Seja L'' a lista de potenciais bicliques retornada pelo Algoritmo 3. Ao fim da execução do algoritmo, a lista L'' é descrita como

$$\begin{aligned} L''[0] &\leftarrow (\{2, 1, 3\}, 1, 1) \\ L''[1] &\leftarrow (\{2, 3, 4\}, 1, 1). \end{aligned}$$

No fim, das doze potenciais bicliques retornadas pela etapa de geração da lista de potenciais bicliques, apenas duas representam bicliques maximais de M .

4.4 Grafo Biclique

Filtrando apenas as potenciais bicliques obtidas pela segunda etapa, podemos, então, gerar o grafo biclique propriamente dito. A etapa da geração do grafo se constitui em gerar um vértice para cada potencial biclique ainda presente na lista e adicionar arestas para cada par de vértices cujas respectivas potenciais bicliques possuem intervalos em comum.

Considere o modelo bipartido de intervalos M de entrada.

Algoritmo 4 Geração do grafo biclique

Entrada: Lista de potenciais bicliques L e $n = |A(M) \cup B(M)|$

Saída: Grafo biclique do modelo M .

```

1: Função GRAFOBICLIQUE( $L, n$ )
2:    $k \leftarrow |L|$ 
3:   Vetor  $c[1..n] \leftarrow (0, \dots, 0)$ 
4:   Grafo  $G \leftarrow ([1..k], \emptyset)$ 
5:   Para  $l_1 \in [1..k]$  :
6:     Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_1])$  :
7:        $c[i] \leftarrow 1$ 
8:     Para  $l_2 \in [1..k]$  e  $l_1 \neq l_2$  :
9:       Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_2])$  e  $\{l_1, l_2\} \notin E(G)$  :
10:        Se  $c[i] = 1$  então:
11:           $E(G) \leftarrow E(G) \cup \{\{l_1, l_2\}\}$ 
12:        Para  $i \in \mathcal{I}(L[l_1])$  :
13:           $c[i] \leftarrow 0$ 
14:   Retorne  $G$ 

```

O Algoritmo 4 recebe a lista de potenciais bicliques L retornada pela etapa de limpeza e o número de intervalos $n = |(A(M) \cup B(M))|$ do modelo bipartido de intervalos de entrada. O algoritmo, então, retorna o grafo biclique do modelo.

Um vetor c de tamanho igual ao número de intervalos do modelo é inicializado com o valor 0 em todas suas posições. Esse vetor é usado para comparar duas potenciais bicliques, verificando se existem intervalos em comum entre elas. Cada posição do vetor representa um intervalo do modelo.

Uma estrutura que representa um grafo G também é inicializada com $|L|$ vértices. Como a estrutura deve permitir inserção de arestas, uma matriz de adjacências é uma escolha aceitável para tal estrutura. Por simplicidade, a referência de cada intervalo é um inteiro de 1 a $|L|$.

Para cada par de potenciais bicliques $L[l_1]$ e $L[l_2]$ da lista, com $l_1, l_2 \in [1..|L|]$ e $l_1 \neq l_2$, verificamos se existe algum vértice em comum. Atribuímos o valor 1 para cada posição do vetor c que representa um intervalo presente em $\mathcal{I}(L[l_1])$. Verificamos em todas posições de c que representam intervalos de $\mathcal{I}(L[l_2])$ se alguma delas possui o valor 1, indicando que tal intervalo também está presente em $L[l_1]$. Se houver algum intervalo em comum, inserimos a aresta $\{l_1, l_2\}$ no grafo G . Ao fim de cada iteração do laço da linha 5, atribuímos o valor 0 a todas as posições de c que tiveram seu valor alterado, permitindo que a comparação seja feita para a próxima iteração.

O algoritmo, então, retorna o grafo G que é grafo biclique do modelo bipartido de intervalos M de entrada.

4.5 Cálculo de Complexidade

Para o cálculo de complexidade da geração apresentada do grafo biclique, considere o modelo bipartido de entrada M e o valor numérico $n = |(A(M) \cup B(M))|$. Como é difícil prever o tamanho da lista de potenciais bicliques, considere também o valor $k \in \mathbb{N}$ como o tamanho da lista de potenciais bicliques gerada pela primeira etapa.

Para a geração da lista de potenciais bicliques, descrita pelo Algoritmo 1, processamos todos os $2n$ eventos, dos quais metade são eventos de início e metade são eventos de fim. Para cada evento de início, percorremos até k potenciais bicliques para inserirmos o intervalo correspondente ao evento nas potenciais bicliques abertas para inserção na parte correspondente ao intervalo. Temos, para alguma constante c_s , que o processamento dos eventos de início é feito em até $kn + c_s$ operações.

Para cada evento de fim, percorremos até k potenciais bicliques em busca daquelas que contêm o intervalo correspondente ao evento. Cada potencial biclique pode conter até n intervalos, os quais são comparados ao intervalo que buscamos. Caso uma potencial biclique contenha o intervalo, é feita uma cópia da potencial biclique, envolvendo uma cópia de até n intervalos, e uma remoção do intervalo na potencial biclique original. O custo de remoção de um intervalo pode ser desconsiderado se mantivermos a posição do intervalo na lista da potencial biclique após sua busca. Temos, para alguma constante c_f , que o processamento dos eventos de fim é feito em até $kn^2 + c_f$ operações.

Portanto, o custo de processamento de todos os eventos é de $kn + c_s + kn^2 + c_f = O(kn^2)$ operações.

Inicializar um vetor de tamanho k é feito em k valorações. Para testarmos se uma potencial biclique possui intervalos das duas partes do modelo, percorremos até n intervalos. Como percorremos k potenciais bicliques para a remoção daquelas que não representam bicliques, temos, para alguma constante c' , que o Algoritmo 2 tem custo de até $k + kn + c' = O(kn)$ operações.

No Algoritmo 3, inicializamos dois vetores de tamanhos n e k . Para cada potencial biclique, marcamos até n posições de um dos vetores, representando os intervalos presentes na potencial biclique e, para as demais $k - 1$ potenciais bicliques, comparamos os valores das posições marcadas para testarmos se todos os intervalos da segunda potencial biclique também pertencem à primeira potencial biclique. Após as comparações, limpamos as n posições do vetor marcadas. Por fim, copiamos até k potenciais bicliques que representam bicliques maximais. Temos, então, que a remoção das potenciais bicliques não maximais é feita, para alguma constante c'' , em até $n + k + 2kn + k(k - 1)n + kn + c'' = n + k + 2kn + k^2n + c'' = O(k^2n)$ operações.

Para a geração do grafo biclique, descrito pelo Algoritmo 4, comparamos as bicliques maximais duas-a-duas, procurando por intervalos em comum. De forma semelhante ao Algoritmo 3, marcamos os intervalos de cada biclique num vetor e, para a outra biclique, verificamos se existe algum intervalo que já foi marcado. Ao final de até $k - 1$ comparações de uma das bicliques maximais, as posições marcadas no vetor são desmarcadas, permitindo que a comparação seja

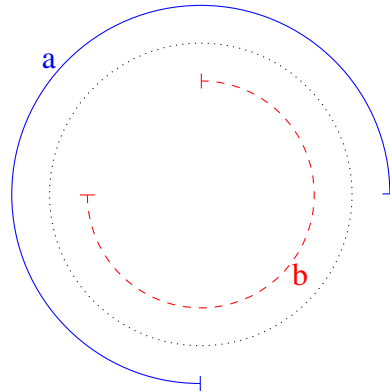


Figura 4.2: Modelo bipartido arco-circular com algum arco cujo evento de fim sempre ocorre antes de seu evento de início

feita com uma outra biclique. Como são até k bicliques maximais de até n intervalos, temos, para alguma constante c''' , até $k^2(3n) + c''' = O(k^2n)$ operações.

Note que, para a geração do grafo biclique, pode haver um custo adicional de inicialização da estrutura que representa o grafo. Se a estrutura escolhida for uma matriz de adjacência, é necessário inicializar a matriz para que a estrutura represente que o grafo não possua aresta no início de sua geração, o que leva a $O(k^2)$ operações para a inicialização.

Note também que, enquanto mantemos o cálculo de complexidade em função de n e k , o tamanho da representação dos intervalos depende do número de intervalos do modelo de entrada. Implementando a representação de cada intervalo como um identificador numérico que admite valores de 1 a n , temos que a representação de cada intervalo tem tamanho $\Omega(\log n)$, o que faz a representação do modelo de entrada ter tamanho $\Omega(n \log n)$.

4.6 Adaptação para o Caso Bi-Arco-Circular

Um dos problemas em procurar por bicliques maximais de modelos bipartidos arco-circulares usando a estratégia de varredura proposta é que, como consequência da representação por eventos de início e fim, algumas bicliques maximais podem ser formadas por arcos cujos eventos ocorrem próximos dos extremos da sequência de todos os eventos. Apenas processar os eventos pela estratégia proposta faz que potenciais bicliques acabem incompletas, com arcos que não são inseridos por conta da impossibilidade de detectar intersecções com arcos cujos eventos de fim ocorrem antes dos de início na representação.

Podemos considerar esse caso como um de bicliques maximais que são “cortadas”, pelo fato da representação de algum de seus arcos atravessar os extremos da sequência de eventos do modelo. Mostramos, pelo exemplo a seguir, que alguns modelos bipartido arco-circulares não admitem uma representação que não “corte” algum arco.

A Figura 4.2 ilustra um modelo bipartido arco-circular M definido como $A(M) = \{a\}$, $B(M) = \{b\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_a, f_b, s_b, f_a)$. Note que, independente da rotação da sequência $\mathbb{E}(M)$, existe sempre algum arco cujo evento de fim ocorre antes de seu evento de início. Arcos de $A(M)$ estão representados em linhas contínuas e arcos de $B(M)$ estão em tracejado. Eventos de M são representados em ordem anti-horária em torno da circunferência.

Uma das hipóteses levantadas para o funcionamento do algoritmo é de que ele requer apenas continuidade para o reconhecimento de bicliques, isto é, se é possível detectar todas as intersecções entre as bicliques pela ordem em que eventos ocorrem, então é possível encontrar todas as bicliques maximais.

A noção de continuidade do processamento dos eventos de início e fim nos sugere uma adaptação para tratar modelos bipartidos arco-circulares: após o processamento de todos os eventos, da forma de que é feito pelo Algoritmo 1, processar novamente todos os eventos uma segunda vez.

Reprocessar todos os eventos de fim garante que, para todo evento de fim, existe sempre seu respectivo evento de início ocorrendo antes. Note que essa operação não elimina eventos de fim que ocorrem antes de algum de seus eventos de início. De fato, temos duplicatas de eventos para a geração da lista de potenciais bicliques.

Algoritmo 5 Geração da lista de potenciais bicliques para o caso bi-arco-circular

Entrada: Modelo bipartido arco-circular M

Saída: Lista de potenciais bicliques

```

1: Função BACSWEEPLINE( $M$ )
2:   Lista  $L$ 
3:   INSIRA( $L$ , POTENCIAL_BICLIQUE())
4:   Para  $e \in \mathbb{E}(M) + \mathbb{E}(M)$  : ▷ Concatena  $\mathbb{E}(M)$  com  $\mathbb{E}(M)$ 
5:     Intervalo  $d \leftarrow$  INTERVALO_EVENTO( $e$ )
6:      $p \leftarrow$  PARTE( $d$ )
7:     Se  $e = s_d$  então:
8:       Para  $b \in L$  :
9:         Se PARTE_ABERTA( $b$ ,  $p$ ) então:
10:           $I(b) \leftarrow I(b) \cup \{d\}$ 
11:       Senão ▷  $e = f_d$ 
12:       Para  $b \in L$  :
13:         Se  $d \in I(b)$  então:
14:           $b' \leftarrow$  COPIE( $b$ )
15:          FECHER_PARTE( $b$ , CONTRARIA( $p$ ))
16:           $I(b') \leftarrow I(b') \setminus \{d\}$ 
17:          INSIRA( $L$ ,  $b'$ )
18:   Retorne  $L$ 

```

A única diferença entre o Algoritmo 5 e o Algoritmo 1 é a inclusão do reprocessamento de todos os eventos durante o laço principal, descrito como uma concatenação da sequência $\mathbb{E}(M)$ com ela mesma na linha 4. Caso o próximo evento a ser processado durante alguma das iterações seja um evento de fim de algum intervalo que não teve seu evento de início processado, o processamento pode ser ignorado pelo fato do intervalo ainda não estar inserido em potencial biclique alguma. Entretanto, eventos de início e eventos de fim que tiveram seu evento de início relacionado processados em alguma iteração anterior são processados da mesma forma que pelo Algoritmo 1.

Como eventos são processados da mesma maneira, podemos ter duplicatas de potenciais bicliques, que podem representar bicliques maximais, na lista de potenciais bicliques retornada pelo algoritmo. Entretanto, o Algoritmo 3 já lida com a remoção de duplicatas, deixando apenas uma das potenciais bicliques que representam a mesma biclique maximal.

Embora a modificação do algoritmo pareça resolver a listagem de bicliques maximais para o caso bi-arco-circular, ainda é necessário uma prova de sua corretude. A prova de corretude para o caso de bi-intervalos, apresentada ao longo do Capítulo 5, não é suficiente para garantir a corretude para o caso bi-arco-circular por depender de argumentos específicos para o caso de bi-intervalos.

5 Corretude do Algoritmo

Neste capítulo, apresentamos a prova de corretude do Algoritmo 1, apresentado na Seção 4.2 do capítulo anterior.

Como o algoritmo é iterativo, usamos o argumento da invariante de laço para mostrarmos que todas as bicliques maximais são encontradas até o fim da última iteração do laço principal. Como, para cada iteração, um evento de início ou fim diferente é processado, temos a garantia de que o laço termina após processar todos os eventos.

Em nossa prova, descrevemos que potenciais bicliques que representam bicliques maximais devem ser encontradas até determinada iteração e mostramos que tais potenciais bicliques realmente são encontradas usando as regras de processamento de eventos do algoritmo.

Pelas próximas seções, considere um modelo bipartido de intervalos M qualquer como a entrada do algoritmo e o valor $n = (A(M) \cup B(M))$. Também considere os eventos e_1, \dots, e_{2n} como os eventos de $\mathbb{E}(M)$, os quais são processados pela ordem de seus índices pelo algoritmo.

Os enunciados de nossos teoremas são simplificados para descrever propriedades usando uma das partes como base. Ao descrevermos uma expressão, também descrevemos sobre a expressão similar onde toda ocorrência de $A(M)$ é trocada por $B(M)$ e vice-versa.

Começamos com a Seção 5.1, onde apresentamos a notação ϕ , que nos dá meios de simplificarmos expressões que descrevem conjuntos de intervalos baseados em sequências contínuas de eventos processados, ou seus índices, e por um dos dois tipos de eventos do modelo.

Em seguida, na Seção 5.2, apresentamos variáveis úteis para enunciarmos os teoremas envolvidos com a prova de corretude do algoritmo.

A Seção 5.3 apresenta certas propriedades do algoritmo que descrevem sua capacidade de manter bicliques maximais encontradas durante a execução.

Na Seção 5.4, descrevemos dois estados intermediários do algoritmo e descrevemos todas as potenciais bicliques maximais que contêm intervalos processados e provamos que tais potenciais bicliques estão na lista do algoritmo.

Por fim, na Seção 5.5, apresentamos a invariante de laço usada para a prova de corretude do algoritmo e provamos sua validade, provando também a corretude.

5.1 Notação ϕ

Para a prova de corretude do algoritmo proposto, fazemos uso de argumentos referentes aos conjuntos de intervalos presentes durante certo estado do algoritmo em algumas de suas iterações do laço principal.

Por exemplo, queremos descrever os intervalos que começam entre a i -ésima e a j -ésima iteração do laço, para $i, j \in [1..2n]$ com $i \leq j$. Assim, podemos construir o conjunto de intervalos que são inseridos em determinada potencial biclique enquanto alguma de suas partes está aberta para receber novos intervalos.

A notação que apresentamos nesta seção tem como objetivo simplificar a escrita de tais conjuntos de intervalos e oferecer uma forma de manipulá-los algebricamente. Tais manipulações são usadas para a construção dos conjuntos de conjuntos de intervalos presentes em potenciais bicliques e mostrar que as bicliques maximais são parte desse conjunto.

Definição 18. Sejam dois inteiros $i, j \in [1..2n]$ com $i \leq j$. Denotamos por $\phi_s(M)[i..j]$ o conjunto de intervalos de M tal que seus respectivos eventos de início ocorrem a partir de e_i e até e_j , para eventos e_i, e_j de $\mathbb{E}(M) = (e_1, \dots, e_{2n})$. Isto é,

$$\phi_s(M)[i..j] = \{d \in (A(M) \cup B(M)) : e_i \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e_j\}.$$

Definição 19. Sejam dois inteiros $i, j \in [1..2n]$ com $i \leq j$. Denotamos por $\phi_f(M)[i..j]$ o conjunto de intervalos de M tal que seus respectivos eventos de fim ocorrem a partir de e_i e até e_j , para eventos e_i, e_j de $\mathbb{E}(M) = (e_1, \dots, e_{2n})$. Isto é,

$$\phi_f(M)[i..j] = \{d \in (A(M) \cup B(M)) : e_i \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e_j\}.$$

Como estamos lidando com conjuntos, temos que todas identidades de manipulações algébricas entre conjuntos valem. Também podemos usar algumas das propriedades de modelos bipartidos de intervalos para prevermos resultados de operações entre tais conjuntos. Por exemplo, como a ordenação dada por $\mathbb{E}(M)$ é total, temos, para qualquer $i \in [1..2n]$, que e_i só pode ou ser evento de início ou evento de fim. Isto é, que

$$\phi_s(M)[i..i] \cap \phi_f(M)[i..i] = \emptyset.$$

Como outro exemplo, temos que todo evento de fim de determinado intervalo ocorre após seu respectivo evento de início. Portanto, para $i, j, k, l \in [1..2n]$ com $i \leq j \leq k \leq l$, vale que

$$\phi_f(M)[i..j] \cap \phi_s(M)[k..l] = \emptyset.$$

Como implicação de tal propriedade, temos informação sobre os conjuntos de intervalos que nos permitem manipular expressões como, para o conjunto de intervalos $S \subseteq (A(M) \cup B(M))$,

$$(S \setminus \phi_f(M)[i..j]) \cup \phi_s(M)[k..l] = (S \cup \phi_s(M)[k..l]) \setminus \phi_f(M)[i..j].$$

Para a união de intervalos de sequências contínuas ou intersectantes de eventos de mesmo tipo, podemos denotar o resultado expandindo os índices cobertos pelos conjuntos da união. Por exemplo, para $i, j, k \in [1..2n]$ com $i \leq j \leq k$, temos que

$$\phi_s(M)[i..j] \cup \phi_s(M)[j..k] = \phi_s(M)[i..k].$$

Se tivermos garantia de que uma certa região da sequência $\mathbb{E}(M)$ possui eventos de apenas um dos tipos, então podemos simplificar uma união de conjuntos de intervalos de sequências de outro tipo que cobrem tal região. Por exemplo, para $i, j, k, l \in [1..2n]$ com $i \leq j \leq k \leq l$ e se $\phi_s(M)[j..k] = \emptyset$, temos que

$$\phi_s(M)[i..j] \cup \phi_s(M)[k..l] = \phi_s(M)[i..l].$$

A intersecção de conjuntos de regiões não intersectantes de eventos de mesmo tipo é sempre vazia, pois todo evento ocorre uma única vez em $\mathbb{E}(M)$. Por exemplo, temos, para i, j, k, l com $i \leq j < k \leq l$, que

$$\phi_s(M)[i..j] \cap \phi_s(M)[k..l] = \emptyset.$$

5.2 Acompanhando as Potenciais Biclques

Nesta seção, definimos as variáveis que descrevem o estado do Algoritmo 1 em relação às iterações do laço da linha 4. Considere o modelo bipartido de intervalos M de entrada e n como o número de intervalos de M .

Para manter controle do estado de cada potencial biclique durante cada iteração, definimos os conjuntos L_0, \dots, L_{2n} , que descrevem o valor da lista L do algoritmo durante cada iteração. O conjunto L_0 contém as potenciais biclques em L logo antes da primeira iteração, enquanto os demais conjuntos contêm as potenciais biclques de L ao fim das respectivas iterações que representam. Como nenhuma outra operação é feita após o laço, o conjunto L_{2n} contém todas as potenciais biclques retornadas pelo algoritmo.

Definição 20. Para $i \in [1..2n]$, os conjuntos L_i são os conjuntos das potenciais biclques na lista L ao final da i -ésima iteração do laço da linha 4 do Algoritmo 1. O conjunto L_0 é o conjunto das potenciais biclques na lista L antes da primeira iteração.

Pelo algoritmo, temos que o conjunto L_0 contém apenas a potencial biclique $(\emptyset, 0, 0)$.

Para melhor acompanharmos quais biclques maximais são encontradas durante a execução do algoritmo, definimos o conjunto de biclques maximais formadas apenas pelos intervalos cujos eventos de início ocorrem em regiões contínuas de $\mathbb{E}(M)$. Podemos interpretar a ideia do processamento de eventos de início durante o laço do algoritmo como uma “inserção do intervalo

no sistema de potenciais bicliques”, isto é, os eventos de início possibilitam que as bicliques maximais possam se formar pelas potenciais bicliques.

Definição 21. Sejam $i, j \in [1..2n]$ com $i \leq j$, denotamos por $\mathcal{B}_M^*[i..j]$ o conjunto de bicliques maximais do modelo bipartido de intervalos M que contêm apenas intervalos que começam entre os eventos e_i e e_j inclusivos, isto é,

$$\mathcal{B}_M^*[i..j] = \{b \in \mathcal{B}_M : b \subseteq \phi_s(M)[i..j]\}.$$

Se $j \leq i$, definimos que $\mathcal{B}_M^*[i..j] = \emptyset$.

A notação a seguir é usada para simplificarmos referências aos conjuntos de intervalos das potenciais bicliques de determinada iteração.

Definição 22. Seja $i \in [1..2n]$. Denotamos por $\mathcal{I}^*(L_i)$ o conjunto de todos os intervalos das potenciais bicliques em L_i . Isto é,

$$\mathcal{I}^*(L_i) = \{\mathcal{I}(b) : \forall b \in L_i\}.$$

5.3 Persistência das Potenciais Bicliques

Nesta seção, mostramos que, uma vez encontradas, as potenciais bicliques que representam bicliques maximais continuam a existir na lista de potenciais bicliques durante todas as iterações seguintes.

Primeiramente, mostramos que se, durante certa iteração, existir alguma potencial biclique que representa alguma biclique maximal na lista, tal potencial biclique continua na lista independente do próximo evento de $\mathbb{E}(M)$ a ser processado.

Teorema 1. *Sejam $i \in [0..2n - 1]$ e um subconjunto de bicliques maximais $S \subseteq \mathcal{B}_M$.*

Se o algoritmo encontra as bicliques em S até a i -ésima iteração, então todas as bicliques em S estão em L_{i+1} , isto é,

$$S \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies S \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Prova. Seja $b \in L_i$ uma potencial biclique tal que $\mathcal{I}(b) \in S$. Seja também a potencial biclique $b' \in L_{i+1}$ correspondente a b na $(i + 1)$ -ésima iteração.

Considere o caso onde o próximo evento a ser processado pelo algoritmo é um evento de início de um intervalo d , isto é, que $e_{i+1} = s_d$. Sem perda de generalidade, assumamos que $d \in A(M)$.

Como M é um modelo bipartido de intervalos, sabemos que d não está presente nas potenciais bicliques de L_i .

Vamos provar por redução ao absurdo que, se $\mathcal{I}(b)$ é biclique maximal de M , então d não está em $\mathcal{I}(b')$.

Assuma que d é inserido em b , isto é, que $\mathcal{I}(b') = \mathcal{I}(b) \cup \{d\}$. Logo, temos que a parte a qual d pertence está aberta para receber intervalos durante a i -ésima iteração, isto é, que $a^*(b) = 0$.

Como $\mathcal{I}(b)$ é biclique maximal, temos que existe pelo menos um intervalo na parte contrária de d em b , isto é, que $\mathcal{I}(b) \cap B(M) \neq \emptyset$.

Como o algoritmo apenas atribui 1 a $a^*(b)$ quando algum dos intervalos de $\mathcal{I}(b) \cap B(M)$ termina, temos que nenhum dos intervalos da parte contrária a d terminou.

Logo, temos que o intervalo d intersecta todos os intervalos de $\mathcal{I}(b) \cap B(M)$ no modelo M , pois $s_{d'} <_{\mathbb{E}(M)} f_d$ e $s_d <_{\mathbb{E}(M)} s_{d'}$, para todo $d \in \mathcal{I}(b) \cap B(M)$.

Portanto, temos que $\mathcal{I}(b) \cup \{d\}$ é biclique de M . Porém, $\mathcal{I}(b)$ é maximal. Logo, temos que d não pode ser inserido em b .

Considere o caso onde e_{i+1} é evento de fim de algum intervalo d , isto é, que $e_{i+1} = f_d$. Sem perda de generalidade, assumamos que $d \in A(M)$.

Se d não foi inserido em b , isto é, que $d \notin \mathcal{I}(b)$, temos que o processamento do evento f_d não afeta a potencial biclique b .

Se d já foi inserido em b , isto é, que $d \in \mathcal{I}(b)$, temos que o algoritmo apenas fecha o intervalo da parte contrária a d , isto é, atribui 1 a $a^*(b')$ e faz uma cópia independente de b que remove d . Como a remoção ocorre apenas na cópia, temos que o conjunto de intervalos da potencial biclique não foi alterado, isto é, que $\mathcal{I}(b') = \mathcal{I}(b)$.

Logo, temos que toda potencial biclique que representa uma biclique maximal de M encontrada até o fim da i -ésima iteração também permanece na lista L do algoritmo após a $(i + 1)$ -ésima iteração. \square

Se potenciais bicliques que descrevem bicliques maximais continuam presentes na lista na próxima iteração, independente de qual for o evento a ser processado, então tais potenciais bicliques também continuam a existir nas iterações seguintes. O seguinte corolário enuncia a transitividade da propriedade de permanência das bicliques maximais encontradas até o fim da última iteração do laço.

Corolário 2. *Sejam $i \in [1..2n - 1]$ e um subconjunto de bicliques maximais $S \subseteq \mathcal{B}_M$.*

Se o algoritmo encontra as bicliques em S até a i -ésima iteração, então todas as bicliques em S estão presentes na lista de potenciais bicliques nas iterações seguintes, isto é, para $k \in [i + 1..2n]$, vale que

$$S \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies S \subseteq \mathcal{I}^*(L_k).$$

Prova. Podemos concluir, pelo Teorema 1, que

$$S \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies S \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}) \implies \dots \implies S \subseteq \mathcal{I}^*(L_{2n}).$$

Logo, temos que $S \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies S \subseteq \mathcal{I}^*(L_k)$, para qualquer $k \in [i + 1..2n]$. \square

5.4 Composição das Potenciais Biclques

Durante as iterações do laço do algoritmo, é possível descrever biclques formadas por intervalos cujos eventos foram processados. Nesta seção, identificamos alguns tipos de biclques e provamos que existem potenciais biclques que as representam.

O argumento da existência de tais potenciais biclques tem como base o conceito de “cadeia de potenciais biclques de interesse”, o qual usamos durante as provas. Primeiramente, apresentamos esse conceito e, então, descrevemos algumas construções de biclques com base no estado de processamento de eventos de determinada iteração e nos intervalos respectivamente relacionados. Podemos separar as construções entre aquelas formadas por intervalos cujos respectivos eventos de fim ainda não foram processados e aquelas que contêm algum intervalo com seu evento de fim processado em alguma iteração anterior.

5.4.1 Cadeia de Potenciais Biclques de Interesse

Toda potencial biclique, exceto pela primeira, surge de alguma das potenciais biclques da lista. Durante o processamento de cada iteração, potenciais biclques podem receber um novo intervalo, se tal evento for de início e a potencial biclique está aberta para receber o intervalo; ou fecham para recebimento de novos intervalos em uma de suas partes, se tal evento for de fim e a potencial biclique possui seu intervalo. Uma cópia da potencial biclique sem o intervalo que terminou também é inserida na lista em conjunto com o fechamento da original. A potencial biclique também pode não ser afetada pelo processamento de algum evento, mantendo-se inalterada pelas iterações.

Podemos, então, dizer que toda potencial biclique de uma iteração i possui uma potencial biclique de origem na iteração $i - 1$, para todo $i \in [1..2n]$, seja essa a original de uma cópia, a mesma após o fechamento de uma das partes ou após a inserção de um intervalo.

Para mostrarmos que certa potencial biclique existe em determinada iteração, mostramos que sua origem existe na iteração anterior do laço. Podemos mostrar que a origem existe mostrando que sua própria origem também existe, seguindo uma “cadeia” de potenciais biclques, onde cada potencial biclique é origem da próxima. Chamamos tal cadeia de *cadeia de potenciais biclques de interesse* e podemos descrevê-la como uma *relação de recorrência*.

Os teoremas desta seção enunciam a existência de certas potenciais biclques durante a execução do algoritmo. Para provarmos a existência de tais potenciais biclques, usamos o conceito de cadeia de potenciais biclques como argumento.

5.4.2 Potenciais Biclques sem Intervalos que Terminaram

Um dos tipos de potenciais biclques cuja existência vamos provar é o que é composto por intervalos que ainda não terminaram, isto é, cujo evento de fim ainda não foi processado.

Considere duas iterações, a i -ésima e a j -ésima, tais que $j \leq i$. Vamos mostrar que, se alguma das potenciais biclques em L_j contém intervalos que não terminam até a i -ésima iteração, então existe alguma potencial biclique em L_i composta de tais intervalos e de todos os intervalos seguintes, até a i -ésima iteração, que não terminaram.

Note que, enquanto novos eventos de início e de fim são processados durante a j -ésima e a i -ésima iteração, a potencial biclique ainda pode receber intervalos e gerar cópias sem intervalos que terminam.

Teorema 3. *Sejam $i \in [0..2n]$, $j \in [0..i]$ e o conjunto de intervalos P presente em uma das potenciais bicliques de L_j , isto é, $P \in \mathcal{I}^*(L_j)$. Seja também o subconjunto de intervalos*

$$S = \phi_s(M)[j + 1..i] \setminus \phi_f(M)[j + 1..i].$$

Se nenhum evento de fim de algum intervalo de P foi processado até o fim da i -ésima iteração do algoritmo, então o conjunto $(P \cup S)$ está presente em uma das potenciais bicliques de L_i , isto é,

$$\phi_f(M)[1..i] \cap P = \emptyset \implies (P \cup S) \in \mathcal{I}^*(L_i).$$

Prova. Seja $b_0 \in L_j$ a potencial biclique relativa a P , isto é, tal que $\mathcal{I}(b_0) = P$.

Como nenhum evento de fim de P foi encontrado até o fim da i -ésima iteração, temos que $a^*(b_0) = 0$ e que $b^*(b_0) = 0$.

Denotamos por $\mathcal{I}\{e\}$ o conjunto que contém o intervalo relacionado ao evento e . Vamos definir a cadeia de potenciais bicliques de interesse b_1, \dots, b_{i-j} tal que, para $k \in [1..i-j]$, a potencial biclique b_k é obtida pelo processamento do $(j+k)$ -ésimo evento em $\mathbb{E}(M)$ sobre a potencial biclique b_{k-1} , isto é,

$$b_k = \begin{cases} (\mathcal{I}(b_{k-1}) \cup \mathcal{I}\{e_{j+k}\}, a^*(b_{k-1}), b^*(b_{k-1})), & \text{se } e_{j+k} \in \{0\} \times A(M) \text{ e } a^*(b_{k-1}) = 0 \\ (\mathcal{I}(b_{k-1}) \cup \mathcal{I}\{e_{j+k}\}, a^*(b_{k-1}), b^*(b_{k-1})), & \text{se } e_{j+k} \in \{0\} \times B(M) \text{ e } b^*(b_{k-1}) = 0 \\ (\mathcal{I}(b_{k-1}) \setminus \mathcal{I}\{e_{j+k}\}, a^*(b_{k-1}), b^*(b_{k-1})), & \text{se } e_{j+k} \in \{1\} \times (A(M) \cup B(M)) \\ b_{k-1}, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

A relação de recorrência descrita simula o processamento de uma iteração do algoritmo sobre a mesma potencial biclique, isto é, sem escolher a cópia gerada pela execução dos eventos de fim.

Como não escolhemos a cópia da potencial biclique durante o processamento de cada iteração, temos que todas as potenciais bicliques b_k mantêm o mesmo estado de aberto-fechado em suas partes que b_{k-1} . Como nenhum evento de fim de $\mathcal{I}(b_0)$ ocorre até a i -ésima posição de $\mathbb{E}(M)$, temos que todos os $a^*(b_k)$ e $b^*(b_k)$ valem 0, isto é, que

$$\begin{aligned} a^*(b_0) &= a^*(b_1) = \dots = a^*(b_{i-j}) = 0 \\ b^*(b_0) &= b^*(b_1) = \dots = b^*(b_{i-j}) = 0. \end{aligned}$$

Temos que, se e_{j+k} é evento de início, seu intervalo correspondente é inserido na potencial biclique b_k . Como M é um modelo bipartido de intervalos, todo evento de fim ocorre depois de seu evento de início. Logo, se e_{j+k} for evento de fim, seu intervalo correspondente é removido da potencial biclique b_k e não é inserido novamente. Portanto, ao fim do processamento da i -ésima iteração, a potencial biclique b_{i-j} contém os intervalos de (e_{j+1}, \dots, e_i) que não terminaram, isto é,

$$\mathcal{I}(b_{i-j}) = \mathcal{I}(b_0) \cup (\phi_s(M)[j + 1..i] \setminus \phi_f(M)[j + 1..i]).$$

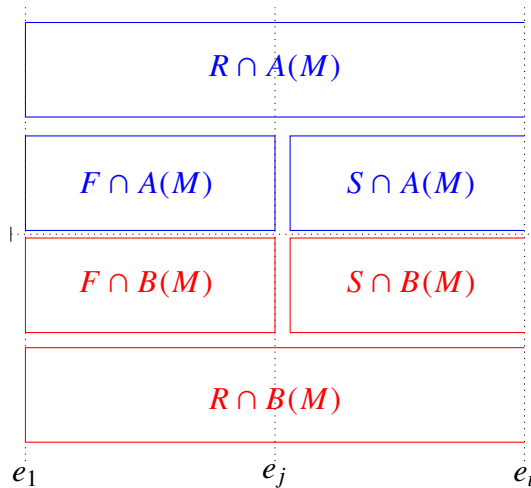


Figura 5.1: Separação dos intervalos em conjuntos R , S e F e pelas partes $A(M)$ e $B(M)$

Logo, temos que

$$I(b_{i-j}) = (P \cup S).$$

Como $b_{i-j} \in L_i$, temos que

$$(P \cup S) \in I^*(L_i).$$

□

5.4.3 Potenciais Biclíques com Intervalos que Terminaram

Considere duas iterações, a i -ésima e a j -ésima, tais que o evento e_i , processado durante a i -ésima iteração, é evento de início e o evento e_j , processado durante a j -ésima iteração, é o último evento de fim antes de e_i , com $i \in [1..2n]$ e $j \in [1..i]$.

Nesse cenário, temos que algum evento de fim ocorreu até a i -ésima iteração. Com base nisso, propomos uma separação dos intervalos processados em três conjuntos. Um desses conjuntos, que referenciamos por F , possui todos os intervalos que terminam antes da i -ésima iteração. Os demais dois conjuntos são de intervalos que não terminam, mas separamos pelo conjunto daqueles que começam antes do último evento de fim, o qual referenciamos por R , e pelo conjunto dos intervalos que começam depois do último evento de fim, o qual referenciamos por S .

Definimos tais conjuntos como

$$S = \phi_s(M)[j..i]$$

$$F = \phi_f(M)[1..j]$$

$$R = \phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] = \phi_s(M)[1..j] \setminus F$$

A Figura 5.1 ilustra a distribuição dos intervalos pelos conjuntos R , S e F . Como cada intervalo pertence a uma das partes, podemos dividir os conjuntos entre aqueles que contêm intervalos da parte $A(M)$ e entre aqueles que contêm intervalos da parte $B(M)$.

Com a informação de quais intervalos começam e terminam e em quais iterações, podemos descrever algumas biclíques. Vamos lidar apenas com biclíques que contêm o conjunto S , pois,

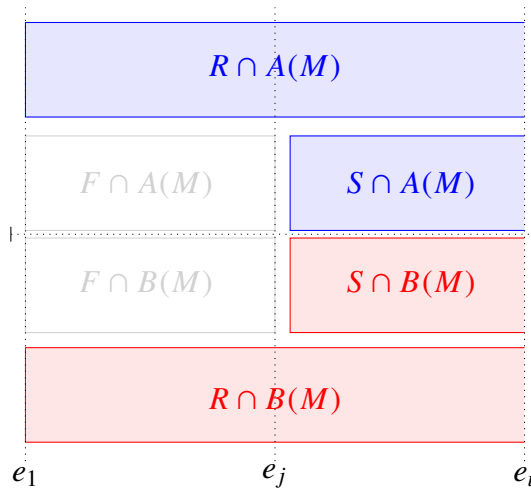


Figura 5.2: Conjuntos de intervalos R e S formam uma biclique

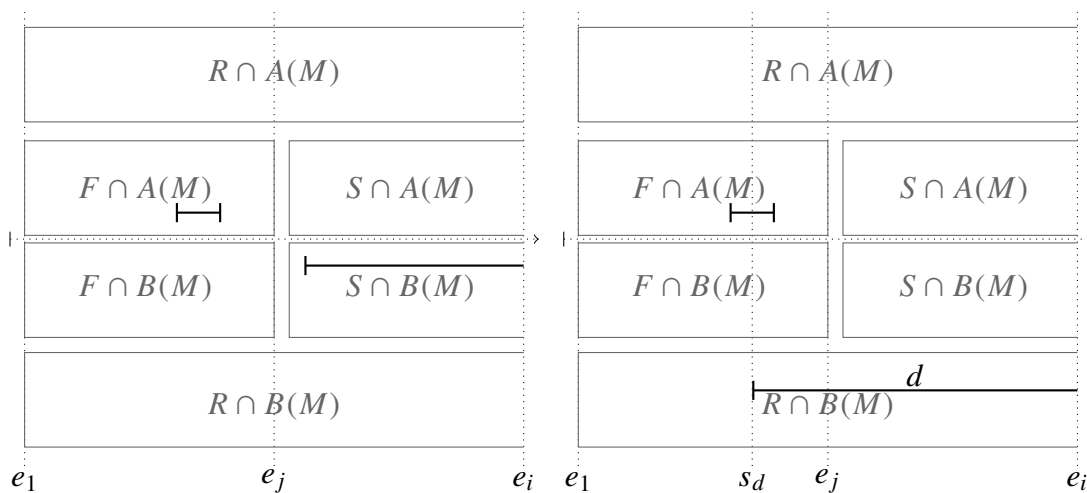


Figura 5.3: Escolha de intervalos que, respectivamente, não formam e podem formar biclique

para toda iteração i válida em nosso cenário, todo intervalo que começa após algum evento de fim pode ser visto como um intervalo de algum S .

A Figura 5.2 deixa em evidência a biclique formada pelos intervalos de R e S . Note que, para incluirmos $S \cap A(M)$, o conjunto $F \cap B(M)$ não pode ser incluído, pois intervalos de F terminam antes dos intervalos de S começarem, impedindo que intervalos desses dois conjuntos tenham intersecção não-vazia. Pelo mesmo motivo, incluir intervalos de $S \cap B(M)$ impede que possamos incluir intervalos de $F \cap A(M)$.

Porém, podemos incluir intervalos de F se não incluirmos alguns intervalos de S . Para incluirmos algum intervalo de $F \cap A(M)$, precisamos não incluir todos os intervalos de $S \cap B(M)$, e vice-versa.

O lado esquerdo da Figura 5.3 ilustra por que incluir algum intervalo de $F \cap A(M)$ impede a inclusão de algum intervalo de $S \cap B(M)$. O lado direito ilustra uma alternativa que permite a inclusão do intervalo de $F \cap A(M)$.

Entretanto, como intervalos de F podem terminar antes de algum intervalo de R começar, precisamos não incluir intervalos de, digamos, $R \cap B(M)$ que começam após o intervalo de

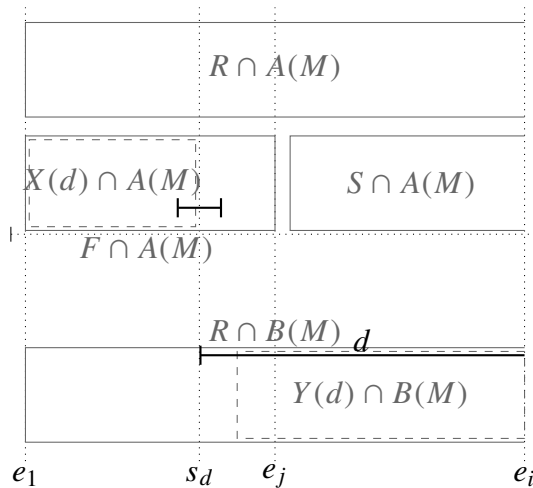


Figura 5.4: Subconjuntos $X(d) \cap A(M)$ e $Y(d) \cap B(M)$ impedem a formação de uma biclique

$F \cap A(M)$ que queiramos incluir, assim como não incluir intervalos de $F \cap A(M)$ que terminam antes dos intervalos de $R \cap B(M)$ que queiramos incluir. Para descrevermos quais intervalos de R e S podemos incluir, parametrizamos os subconjuntos que precisamos excluir em função de algum intervalo de $R \cap B(M)$ que possamos incluir. O lado direito da Figura 5.3 ilustra a escolha de um intervalo $d \in R \cap B(M)$ que podemos usar como tal parâmetro.

Vamos definir o subconjunto $X(d) \subseteq F$ como o de intervalos de F que não incluímos por terminarem antes de s_d . Vamos também definir o subconjunto $Y(d) \subseteq R$ como o de intervalos de R que não incluímos por começarem depois de algum intervalo de F que incluímos terminar. Formalmente, definimos tais conjuntos como

$$\begin{aligned} X(d) &= \{x \in F : f_x <_{\mathbb{E}(M)} s_d\} \\ Y(d) &= \{y \in R : f_x <_{\mathbb{E}(M)} s_y, \exists x \in F \setminus X(d)\}. \end{aligned}$$

Note que o quantificador existencial da definição de $Y(d)$ tem o efeito de selecionar o evento de fim mais à esquerda de $\{1\} \times (F \setminus X(d))$. Curiosamente, o quantificador universal usaria o evento de fim mais à direita.

A Figura 5.4 ilustra os subconjuntos $X(d)$ e $Y(d)$ que não são inclusos para a descrição da biclique, para $d \in (R \cap B(M))$. Intervalos de $X(d) \cap A(M)$ não são inclusos pois terminam antes de s_d , enquanto intervalos de $Y(d)$ não são inclusos pois começam depois de algum intervalo de $F \setminus X(d)$ terminar.

Assumindo $d \in (R \cap B(M))$, podemos, então, incluir todos os intervalos de $R \cap A(M)$ e $S \cap A(M)$, pois intersectam com d . E, assim como discutido, podemos incluir os intervalos de $(F \setminus X(d)) \cap A(M)$ e os de $(R \setminus Y(d)) \cap B(M)$. Enquanto não incluímos intervalos de $S \cap B(M)$ nem de $F \cap B(M)$ por, respectivamente, incluirmos intervalos de $F \cap A(M)$ e $S \cap A(M)$. A biclique é, então, composta por

$$((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M)).$$

O seguinte teorema enuncia que existe alguma potencial biclique da i -ésima iteração que contém tal conjunto.

Teorema 4. *Seja $i \in [1..2n]$ tal que e_i é evento de início. Seja também $j \in [1..i]$ tal que e_j é o último evento de início antes de e_i .*

Sejam, para qualquer intervalo d , os conjuntos de intervalos

$$\begin{aligned} S &= \phi_s(M)[j..i] \\ F &= \phi_f(M)[1..i] \\ R &= \phi_s(M)[1..j] \setminus F \\ X(d) &= \{x \in F : f_x <_{\mathbb{E}(M)} s_d\} \\ Y(d) &= \{y \in R : f_y <_{\mathbb{E}(M)} s_y, \exists x \in F \setminus X(d)\}. \end{aligned}$$

Vale que existe uma potencial biclique $b \in L_i$ tal que

$$\mathcal{I}(b) = ((S \cup R \cup (F \setminus X(d)))) \cap A(M) \cup ((R \setminus Y(d))) \cap B(M).$$

Prova. Seja qualquer intervalo d do modelo M . Considere a potencial biclique $b_0(d)$ como a potencial biclique vazia gerada antes da primeira iteração do laço principal do algoritmo, isto é, $b_0(d) = (\emptyset, 0, 0)$.

Denotamos por $I\{e\}$ o conjunto que contém o intervalo relacionado ao evento e . Seja a cadeia de potenciais bicliques $b_1(d), \dots, b_l(d)$ descrita pela relação de recorrência

$$(5.1) \quad b_l(d) = \begin{cases} (\mathcal{I}(b_{l-1}(d)) \cup I\{e_l\}, a^*(b_{l-1}(d)), b^*(b_{l-1}(d))), & \text{se } e_l \in \{0\} \times A(M) \text{ e } a^*(b_{l-1}(d)) = 0 \\ (\mathcal{I}(b_{l-1}(d)) \cup I\{e_l\}, a^*(b_{l-1}(d)), b^*(b_{l-1}(d))), & \text{se } e_l \in \{0\} \times B(M) \text{ e } b^*(b_{l-1}(d)) = 0 \\ (\mathcal{I}(b_{l-1}(d)) \setminus I\{e_l\}, a^*(b_{l-1}(d)), b^*(b_{l-1}(d))), & \text{se } e_l \in \{1\} \times A(M) \text{ e } e_l <_{\mathbb{E}(M)} s_d \\ (\mathcal{I}(b_{l-1}(d)), a^*(b_{l-1}(d)), 1), & \text{se } e_l \in \{1\} \times A(M) \text{ e } s_d <_{\mathbb{E}(M)} e_l \\ (\mathcal{I}(b_{l-1}(d)) \setminus I\{e_l\}, a^*(b_{l-1}(d)), b^*(b_{l-1}(d))), & \text{se } e_l \in \{1\} \times B(M) \\ b_{l-1}(d), & \text{c.c.} \end{cases}$$

Levando em conta que o processamento de um evento de fim dá origem a duas potenciais bicliques na próxima iteração, o processamento escolhido para o evento de fim é a cópia com remoção se tal evento ocorre antes de s_d ou se o intervalo relacionado pertence à parte $B(M)$. Se tal evento de fim ocorre depois de s_d e pertence à parte $A(M)$, então o processamento escolhido é o da potencial biclique original com fechamento da parte contrária à do intervalo relacionado, isto é, a que atribui 1 a $b^*(b(d))$, para uma potencial biclique $b(d)$ intermediária entre $b_0(d)$ e $b_l(d)$.

Considere $k \in [1..i]$ como índice correspondente ao evento s_d , isto é, tal que $e_k = s_d$. Como escolhermos a remoção de um intervalo para o processamento dos eventos de fim que ocorrem antes de s_d , temos que ambas partes estão abertas para receber mais intervalos até a k -ésima iteração, isto é, que

$$\begin{aligned} a^*(b_0(d)) &= \dots = a^*(b_k(d)) = 0 \\ b^*(b_0(d)) &= \dots = b^*(b_k(d)) = 0 \\ \mathcal{I}(b_k(d)) &= \phi_s(M)[1..k] \setminus \phi_f(M)[1..k]. \end{aligned}$$

Considere $k' \in [k..i]$ como índice correspondente ao primeiro evento de fim a ocorrer após e_k . Com isso, temos que os valores de $a^*(b_k(d)), \dots, a^*(b_{k'-1}(d))$ e $b^*(b_k(d)), \dots, b^*(b_{k'-1}(d))$ se mantêm os mesmos, isto é, que

$$\begin{aligned} a^*(b_k(d)) &= \dots = a^*(b_{k'-1}(d)) = 0 \\ b^*(b_k(d)) &= \dots = b^*(b_{k'-1}(d)) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, os intervalos inseridos até a potencial biclique $b_{k'-1}(d)$ a partir de $b_k(d)$ são os relacionados aos eventos de início processados entre a $(k + 1)$ -ésima e a $(k' - 1)$ -ésima iteração do laço principal do algoritmo. Enquanto os intervalos removidos são relacionados aos eventos de fim processados entre a $(k + 1)$ -ésima e a $(k' - 1)$ -ésima iteração.

Porém, definimos $e_{k'}$ como o primeiro evento de fim após e_k . Logo, temos que $\phi_f(M)[k + 1..k' - 1] = \emptyset$.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_{k'-1}(d)) &= (\mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k + 1..k' - 1]) \setminus \phi_f(M)[k + 1..k' - 1] \\ &= \mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k + 1..k' - 1]. \end{aligned}$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} a^*(b_{k'}(d)) &= \dots = a^*(b_i(d)) = 0 \\ b^*(b_{k'}(d)) &= \dots = b^*(b_i(d)) = 1 \end{aligned}$$

Como a parte $B(M)$ das potenciais bicliques $b_{k'}(d), \dots, b_i(d)$ é fechada para receber novos intervalos, intervalos são apenas removidos em $B(M)$. Como a parte $A(M)$ ainda se mantém aberta e não escolhemos as cópias com remoção de intervalos no processamento dos eventos de fins de intervalos de $A(M)$, temos o conjunto de intervalos de $b_{k'}(d), \dots, b_i(d)$ apenas recebe mais intervalos.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= ((\mathcal{I}(b_{k'-1}(d)) \cup \phi_s(M)[k'..i]) \cap A(M)) \\ &\cup \left((\mathcal{I}(b_{k'-1}(d)) \setminus \phi_f(M)[k'..i]) \cap B(M) \right). \end{aligned}$$

Substituindo $\mathcal{I}(b_{k'-1}(d))$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= ((\mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k + 1..k' - 1] \cup \phi_s(M)[k'..i]) \cap A(M)) \\ &\cup \left((\mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k + 1..k' - 1]) \setminus \phi_f(M)[k'..i] \cap B(M) \right). \end{aligned}$$

Como $\phi_s(M)[k+1..k'-1] \cup \phi_s(M)[k'..i] = \phi_s(M)[k+1..i]$, podemos simplificar a igualdade como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= ((\mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k+1..i]) \cap A(M)) \\ &\cup \left((\mathcal{I}(b_k(d)) \cup \phi_s(M)[k+1..k'-1]) \setminus \phi_f(M)[k'..i] \right) \cap B(M). \end{aligned}$$

Substituindo $\mathcal{I}(b_k(d))$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= \left((\phi_s(M)[1..k] \setminus \phi_f(M)[1..k]) \cup \phi_s(M)[k+1..i] \right) \cap A(M) \\ &\cup \left((\phi_s(M)[1..k] \setminus \phi_f(M)[1..k]) \cup \phi_s(M)[k+1..k'-1] \right) \setminus \phi_f(M)[k'..i] \cap B(M). \end{aligned}$$

Como todo evento de início em $\mathbb{E}(M)$ ocorre antes de seu respectivo evento de fim, sabemos que nenhum intervalo é inserido numa potencial biclique após seu próprio evento de fim. Se tal intervalo foi removido da potencial biclique, então ele não é inserido novamente. Podemos, então, agrupar a diferença dos conjuntos na expressão.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= \left((\phi_s(M)[1..k] \cup \phi_s(M)[k+1..i]) \setminus \phi_f(M)[1..k] \right) \cap A(M) \\ &\cup \left((\phi_s(M)[1..k] \cup \phi_s(M)[k+1..k'-1]) \setminus \phi_f(M)[k'..i] \right) \cap B(M). \end{aligned}$$

Podemos simplificar a expressão pelas uniões. Temos, então, que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) &= \left(\phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k] \right) \cap A(M) \\ &\cup \left(\phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[k'..i] \right) \cap B(M). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sabemos que $e_k = s_d$. Logo, podemos definir $X(d)$ em termos de notação ϕ . Temos, então, que

$$\begin{aligned} X(d) &= \{x \in F : f_x <_{\mathbb{E}(M)} e_k\} \\ &= \phi_f(M)[1..k] \cap F \\ &= \phi_f(M)[1..k] \cap \phi_f(M)[1..j]. \end{aligned}$$

Como $k < j$, temos que

$$X(d) = \phi_f(M)[1..k]. \quad (5.3)$$

Considere a diferença

$$\begin{aligned} \phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k] &= (\phi_s(M)[j+1..i] \cup \phi_s(M)[1..j]) \setminus \phi_f(M)[1..k] \\ &= (\phi_s(M)[j+1..i] \cup (\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j]) \cup \phi_f(M)[1..j]) \\ &\quad \setminus \phi_f(M)[1..k]. \end{aligned}$$

Como os eventos de fim de $\phi_f(M)[1..k]$ ocorrem antes dos eventos de início de $\phi_s(M)[j+1..i]$, temos que a intersecção entre os dois conjuntos é vazia. Portanto, não precisamos subtrair $\phi_f(M)[1..k]$ de $\phi_s(M)$ na expressão. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k] &= \phi_s(M)[j+1..i] \\ &\cup \left(\left(\left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \right) \cup \phi_f(M)[1..j] \right) \setminus \phi_f(M)[1..k] \right). \end{aligned}$$

Também temos que a intersecção entre $\left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \right)$ e $\phi_f(M)[1..k]$ também é vazia. Logo, não precisamos subtrair $\phi_f(M)[1..k]$ de $\left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \right)$. Temos que

$$\begin{aligned} \phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k] &= \phi_s(M)[j+1..i] \cup \left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \right) \\ &\cup \left(\phi_f(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..k] \right) \\ &= S \cup R \cup \left(F \setminus \phi_f(M)[1..k] \right). \end{aligned}$$

Pela igualdade 5.3, temos que

$$\phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k] = S \cup R \cup (F \setminus X(d)). \quad (5.4)$$

O conjunto $Y(d)$ é definido como o conjunto de intervalos de R tais que seus eventos de início ocorrem depois de algum intervalo de $X(d) \setminus F$. Podemos descrever $Y(d)$ como

$$\begin{aligned} Y(d) &= \phi_s(M)[k'+1..i] \cap R \\ &= \phi_s(M)[k'..i] \cap \left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \right) \\ &= \left(\phi_s(M)[k'..i] \cap \phi_s(M)[1..j] \right) \setminus \phi_f(M)[1..j] \\ &= \phi_s(M)[k'..j] \setminus \phi_f(M)[1..j] \\ &= \phi_s(M)[k'..j] \setminus F. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considere agora a diferença

$$\begin{aligned} \phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[1..i] &= \left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_s(M)[k'..j] \right) \setminus \phi_f(M)[1..i] \\ &= \phi_s(M)[1..j] \setminus \left(\phi_f(M)[1..i] \cup \phi_s(M)[k'..j] \right) \\ &= \left(\phi_s(M)[1..j] \setminus \phi_f(M)[1..i] \right) \setminus \phi_s(M)[k'..j] \\ &= R \setminus \left(\phi_s(M)[k'..j] \right). \end{aligned}$$

Como $R \cap F = \emptyset$, podemos subtrair F de $\phi_s(M)[k'..j]$ sem alterar o resultado da expressão. Temos, então, que

$$\phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[1..i] = R \setminus \left(\phi_s(M)[k'..j] \setminus F \right).$$

Pela igualdade 5.5, temos que

$$\phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[1..i] = R \setminus Y(d). \quad (5.6)$$

Retornando ao valor de $\mathcal{I}(b_i(d))$ fornecido pela equação 5.2, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) = & \left((\phi_s(M)[1..i] \setminus \phi_f(M)[1..k]) \cap A(M) \right) \\ & \cup \left((\phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[k'..i]) \cap B(M) \right). \end{aligned}$$

Pela igualdade 5.4, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) = & ((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \\ & \cup \left((\phi_s(M)[1..k'] \setminus \phi_f(M)[k'..i]) \cap B(M) \right). \end{aligned}$$

Pela igualdade 5.6, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(b_i(d)) = & ((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \\ & \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M)). \end{aligned}$$

□

5.5 Invariante de Laço

Nas seções anteriores deste capítulo, apresentamos propriedades referentes à lista de potenciais bicliques durante a execução do algoritmo. Usamos tais propriedades como argumentos para sua prova de corretude.

A prova de corretude é feita usando uma *invariante de laço*. Enquanto não necessário para a definição da invariante da prova, apresentamos a seguinte definição para simplificarmos a descrição formal da invariante.

Definição 23. Seja um evento e_k de $\{0, 1\} \times (A(M) \cup B(M))$. Denotamos por $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_k)$ o índice do último evento de fim que ocorre antes ou é igual a e_k , caso tal evento exista, ou o valor 1 se não existe um evento de fim que ocorre antes ou é igual a e_k . Ou seja,

$$\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_k) = \begin{cases} k', & \text{se existe o último evento de fim } e_{k'} \text{ antes de } e_k \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

A seguir, apresentamos a invariante de laço e mostramos que sua inicialização e seu término valem.

Invariante de Laço (IL): “Ao fim da i -ésima iteração, todas as bicliques maximais de intervalos cujos eventos de início foram processados estão representadas por potenciais bicliques na lista L .”

Pela notação apresentada até então, podemos descrever a IL como

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i).$$

Inicialização: Nenhum evento é processado antes da primeira iteração do laço. Vale, então, que

$$\mathcal{B}_M^*[1..0] = \emptyset \subseteq \mathcal{I}^*(L_0).$$

Término: O evento de fim de todo intervalo é processado. Logo, assumindo que a IL vale, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{2n})] = \mathcal{B}_M^*[1..2n] = \mathcal{B}_M \subseteq \mathcal{I}^*(L_{2n}).$$

Basta, então, provar que o passo da IL vale, isto é, se a invariante vale para a i -ésima iteração, então ela vale para a $(i + 1)$ -ésima iteração, para todo $i \in [0..2n - 1]$.

Passo: Seja $i \in [0..2n - 1]$. Definimos o passo da IL como

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

5.5.1 Prova do Passo

Para mostrarmos que o passo da IL vale, precisamos mostrar que a IL é independente do tipo de evento a ser processado na próxima iteração, seja esse de início ou de fim.

Se o próximo evento for de início, o último evento de fim processado não muda e, portanto, a condição da IL é a mesma em ambas iterações e os conjuntos de bicliques maximais encontradas pelo algoritmo são o mesmo. Convenientemente, o Teorema 1 prova que nenhuma potencial biclique que representa uma biclique maximal é perdida na próxima iteração, permitindo que seja usado como argumento para o caso de eventos de início serem encontrados. O único tipo de processamento que ocorre quando um evento de início é encontrado é a inserção do seu respectivo intervalo em potenciais bicliques que estejam abertas para receberem novos intervalos de sua respectiva parte. Novamente, o Teorema 1 garante que nenhuma das potencias bicliques que representam bicliques maximais recebem tal intervalo.

Precisamos, então, mostrar que o passo da IL vale para quando o próximo evento a ser processado for de fim. Porém, se o próximo evento for de fim, então a condição descrita pela IL muda, sendo necessário considerar todas as bicliques maximais formadas pelos intervalos com seus eventos de início até então processados.

Para $i \in [1..2n]$, podemos descrever três casos onde e_{i+1} é evento de fim:

- O evento e_i é evento de fim;
- O evento e_{i+1} é o primeiro evento de fim a ser processado; ou
- O evento e_i é evento de início, mas e_{i+1} não é o primeiro evento de fim a ser processado.

Para o caso de e_i ser evento de fim, nenhum evento de início é processado desde $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)$, isto é, desde a última mudança da condição da IL. O lema a seguir enuncia que ambos os conjuntos de bicliques maximais do passo da IL são iguais.

Lema 5. *Seja $i \in [1..2n - 1]$ tal que e_{i+1} é evento de fim. Se e_i é evento de fim, então $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] = \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})]$.*

Prova. Como e_i e e_{i+1} são eventos de fim, vale que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) = i$ e que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1}) = i + 1$.

Como e_{i+1} é evento de fim, temos que $\phi_s(M)[i + 1..i + 1] = \emptyset$. Portanto, vale que

$$\begin{aligned}\phi_s(M)[1..i + 1] &= \phi_s(M)[1..i] \cup \phi_s(M)[i + 1..i + 1] \\ &= \phi_s(M)[1..i] \cup \emptyset \\ &= \phi_s(M)[1..i].\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] &= \mathcal{B}_M^*[1..i + 1] \\ &= \{b \in \mathcal{B}_M : b \subseteq \phi_s(M)[1..i + 1]\} \\ &= \{b \in \mathcal{B}_M : b \subseteq \phi_s(M)[1..i]\} \\ &= \mathcal{B}_M^*[1..i] \\ &= \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)].\end{aligned}$$

□

Para o caso de e_{i+1} ser o primeiro evento de fim a ser processado, temos que todos os eventos de e_1, \dots, e_i são eventos de início. A condição do passo da IL manteve-se a mesma desde a primeira até a i -ésima iteração, tendo sua primeira mudança na próxima iteração. Mostramos, pelo próximo lema, que todas as bicliques maximais compostas pelos intervalos dos primeiros i eventos são encontradas na próxima iteração.

Lema 6. *Seja $i \in [1..2n - 1]$ tal que e_{i+1} seja evento de fim e $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) = 1$.*

Se $\mathcal{B}_M^[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i)$, então $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1})$.*

Prova. Como e_{i+1} é evento de fim, vale que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1}) = i + 1$. Como e_{i+1} é o primeiro evento de fim de e_1, \dots, e_{i+1} , temos que $\phi_f(M)[1..i] = \emptyset$.

Logo, o subconjunto de intervalos $\phi_s(M)[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] = \phi_s(M)[1..1]$ possui um intervalo, o que não é suficiente para formar uma biclique.

Temos, então, que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] = \emptyset.$$

Podemos dividir as bicliques de $\mathcal{B}_M^*[1..i + 1]$ entre aquelas de $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)]$ e as que possuem algum intervalo de $\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i + 1]$.

Como $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] = \emptyset$, todas as bicliques de $\mathcal{B}_M^*[1..i + 1]$ possuem algum intervalo de $\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i + 1]$.

Como $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) = 1$ e e_{i+1} é o primeiro evento de fim de e_1, \dots, e_{i+1} , temos que

$$\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i + 1] = \phi_s(M)[1..i].$$

Como $\phi_f(M)[1..i] = \emptyset$, todos os intervalos de $\phi_s(M)[1..i]$ possuem intersecção não-vazia entre si.

Se o conjunto $\mathcal{B}_M^*[1..i+1]$ não for vazio, então possui o conjunto $\phi_s(M)[1..i]$ como seu único elemento, pois todos seus elementos possuem intersecção não-vazia.

Temos, então, que

$$\mathcal{B}_M^*[1..i+1] \subseteq \{\phi_s(M)[1..i]\}.$$

Considere $j = 0$ e o conjunto $P = \emptyset$. Como $\mathcal{I}^*(L_j) = \mathcal{I}^*(L_0) = \{\emptyset\}$, vale dizer que $P \in \mathcal{I}^*(L_j)$.

Também temos que

$$\phi_f(M)[1..i+1] \cap P = \phi_f(M)[1..i+1] \cap \emptyset = \emptyset.$$

Considere o conjunto

$$\begin{aligned} S &= \phi_s(M)[j+1..i+1] \setminus \phi_f(M)[j+1..i+1] \\ &= \phi_s(M)[1..i+1] \setminus \phi_f(M)[1..i+1] \\ &= \phi_s(M)[1..i+1] \setminus \phi_f(M)[i+1..i+1] \\ &= \phi_s(M)[1..i]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3, temos que

$$\begin{aligned} (P \cup S) &= (\emptyset \cup \phi_s(M)[1..i]) \\ &= \phi_s(M)[1..i] \in \mathcal{I}^*(L_{i+1}). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..i+1] \subseteq \{\phi_s(M)[1..i]\} \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Ou seja, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

□

O último caso, de que e_i é evento de início e existe algum evento de fim que ocorre antes de e_i , também possui mudança da condição do passo da IL. O próximo lema mostra que todas as bicliques maximais formadas pelos intervalos cujos eventos de início foram processados desde a primeira iteração são encontradas pelo algoritmo.

Lema 7. *Seja $i \in [1..2n-1]$ tal que e_{i+1} seja evento de fim e $1 < \mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) < i$.*

Se $\mathcal{B}_M^[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i)$, então $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1})$.*

Prova. Como e_{i+1} é evento de fim, vale que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1}) = i+1$.

Podemos dividir as bicliques e $\mathcal{B}_M^*[1..i+1]$ entre aquelas de $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)]$ e aquelas que possuem algum intervalo de $\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i+1]$.

Como e_{i+1} é evento de fim, temos que

$$\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i+1] = \phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i].$$

Pelo Teorema 1, toda biclique em $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)]$ está em $\mathcal{I}^*(L_{i+1})$.

Basta, então, mostrarmos que as bicliques em $\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})]$ que possuem algum intervalo de $\phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i]$ estão em $\mathcal{I}^*(L_{i+1})$.

Considere um $j = \mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)$ e os conjuntos

$$\begin{aligned} S &= \phi_s(M)[j..i] = \phi_s(M)[\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)..i] \\ F &= \phi_f(M)[1..i] \\ R &= \phi_s(M)[1..j] \setminus F. \end{aligned}$$

Podemos separar as bicliques que possuem algum intervalo de S entre aquelas que possuem intervalos em $S \cap A(M)$ e em $S \cap B(M)$, aquelas que não possuem intervalos em $S \cap B(M)$ e aquelas que não possuem intervalos em $S \cap A(M)$. Como referência, esses são os cenários discutidos na Seção 5.4.

Bicliques que possuem intervalos tanto de $S \cap A(M)$ quanto de $S \cap B(M)$ não possuem intervalos em F , pois, assumindo um intervalo de $F \cap A(M)$, seu evento de fim ocorre antes do evento de início de um intervalo de $S \cap B(M)$. O mesmo ocorre com algum intervalo de $F \cap B(M)$ e os intervalos de $S \cap A(M)$.

Portanto, essas bicliques possuem todos os intervalos de R , pois esses possuem intersecção não-vazia com todos os intervalos de S . Logo, se houver intervalos de diferentes partes em S , o conjunto $(R \cup S)$ pode ser uma biclique maximal se não for subconjunto de uma biclique com intervalos que começam após e_i .

Pelo Teorema 3, temos que

$$(R \cup S) \in \mathcal{I}^*(L_i).$$

Como e_{i+1} é evento de fim, os conjuntos de intervalos das potenciais bicliques de L_i não são alterados. Portanto, temos que

$$(R \cup S) \in \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Bicliques que não possuem intervalos de $S \cap B(M)$ podem ter intervalos de $R \cap B(M)$ e $F \cap A(M)$. Porém, intervalos de $F \cap A(M)$ que terminam antes de algum intervalo de $R \cap B(M)$ começar não podem estar presentes, contanto que exista algum intervalo em $R \cap B(M)$. De forma semelhante, intervalos de $R \cap B(M)$ que começam depois de algum intervalo de $F \cap A(M)$ terminar também não fazem parte da biclique.

Considere tal intervalo $d \in R \cap B(M)$ e os conjuntos

$$\begin{aligned} X(d) &= \{x \in F : f_x <_{\mathbb{E}(M)} s_d\} \\ Y(d) &= \{y \in R : f_x <_{\mathbb{E}(\emptyset)} M\}, \exists x \in F \setminus X(d)\}. \end{aligned}$$

Temos que, se existem intervalos em $S \cap A(M)$ e $R \cap B(M)$, o seguinte conjunto pode conter bicliques maximais de $\mathcal{B}_M^*[1..i+1]$:

$$\bigcup_{d \in R \cap B(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M))\}.$$

De maneira análoga em relação aos conjuntos $S \cap B(M)$ e $R \cap A(M)$, o seguinte conjunto pode conter bicliques maximais de $\mathcal{B}_M^*[1..i+1]$:

$$\bigcup_{d \in R \cap A(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap B(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap A(M))\}.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_M^*[1..i+1] \subseteq & \mathcal{B}_M^*[1..j] \\ & \cup \{R \cup S\} \\ & \cup \bigcup_{d \in R \cap B(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M))\} \\ & \cup \bigcup_{d \in R \cap A(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap B(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap A(M))\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4, temos que

$$\bigcup_{d \in R \cap B(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M))\} \subseteq \mathcal{I}^*(L_i).$$

Como e_{i+1} é evento de fim, temos que $L_i \subseteq L_{i+1}$, pois o processamento de eventos de fim não altera os conjuntos de intervalos das potenciais bicliques em L_i . Logo, temos que

$$\bigcup_{d \in R \cap B(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap A(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap B(M))\} \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

De maneira análoga, temos que

$$\bigcup_{d \in R \cap A(M)} \{((S \cup R \cup (F \setminus X(d))) \cap B(M)) \cup ((R \setminus Y(d)) \cap A(M))\} \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..i+1] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

□

Como todos os possíveis casos de processamento do próximo evento são cobertos, sendo ele de início ou de fim, podemos, então, formalizar a validade do passo da IL.

Teorema 8. *Seja $i \in [1..2n-1]$. Vale que*

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Prova. Se e_{i+1} é evento de início, temos que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1}) = \mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)$.

Pelo Teorema 1, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] = \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Se e_{i+1} e e_i são ambos eventos de fim, pelo Lema 5, vale que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] = \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)].$$

Pelo Teorema 1, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] = \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Se e_{i+1} é evento de fim e e_i é evento de início tal que $\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) = 1$, isto é, o evento e_{i+1} é o primeiro evento de fim de e_1, \dots, e_{i+1} , temos, pelo Lema 6, que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Se e_{i+1} é evento de fim e e_i é evento de início tal que $1 < \mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i) < i$, temos, pelo Lema 7, que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_i)] \subseteq \mathcal{I}^*(L_i) \implies \mathcal{B}_M^*[1..\mathbf{d}_M^{\text{last}}(e_{i+1})] \subseteq \mathcal{I}^*(L_{i+1}).$$

□

Por fim, com a prova do início, do término e do passo da IL, temos que o algoritmo encontra todas as bicliques maximais do modelo bipartido de intervalos de entrada.

6 Grafos de Co-comparabilidade

Considere um conjunto X qualquer. Dizemos que a relação $R \subseteq X \times X$ é *reflexiva* se o par ordenado (x, x) está presente, para todo elemento $x \in X$. Dizemos que a relação R é *antissimétrica* se os pares (x, y) e (y, x) não estão simultaneamente presentes, para quaisquer elementos $x, y \in X$. A relação R é dita *transitiva* se a presença dos pares (x, y) e (y, z) implica na presença de (x, z) , para quaisquer elementos $x, y, z \in X$.

Chamamos de *ordem parcial* sobre um conjunto X uma relação de $X \times X$ que exhibe as propriedades de reflexão, antissimetria e transitividade. Dizemos que dois elementos $x, y \in X$ são comparáveis se algum dos pares (x, y) e (y, x) estão presentes na ordem parcial.

Considere um conjunto finito qualquer X e alguma ordem parcial sobre os elementos de X . Um grafo G que admite uma bijeção de seu conjunto de vértices a X onde dois vértices compartilham uma aresta se, e somente se, os respectivos elementos de X são comparáveis pela ordem parcial é chamado de grafo de comparabilidade.

A classe dos grafos de co-comparabilidade é a classe dos grafos complementares aos de comparabilidade, isto é, a classe de grafos que admitem uma bijeção do conjunto de vértices a algum conjunto finito X e alguma ordem parcial em X tais que dois vértices compartilham uma aresta se, e somente se, seus respectivos elementos de X não são comparáveis pela ordem parcial.

Neste capítulo, apresentamos a prova de que grafos biclique de grafos de bi-intervalos pertencem à classe dos grafos de co-comparabilidade. A prova consiste em descrever uma ordem parcial para as bicliques maximais de um modelo bipartido de intervalos e mostrar que duas bicliques são comparáveis nessa ordem se, e somente se, a intersecção entre elas for vazia.

Sejam duas bicliques maximais b_1 e b_2 de um modelo bipartido de intervalos M . A ordem parcial que usamos para a prova de caracterização pode ser descrita como b_1 ocorre antes de b_2 se, para cada uma das partes $A(M)$ e $B(M)$, o último evento de início de b_1 da parte ocorre antes do primeiro evento de início da mesma parte de b_2 .

A prova de que duas bicliques são comparáveis se a intersecção entre elas for vazia é derivada de algumas propriedades das bicliques quando descritas em termos de suas estruturas internas que chamamos de “vãos” e “centros”. A prova de que duas bicliques não possuem intersecção se elas são comparáveis é uma implicação das condições da ordem parcial escolhida.

Da mesma forma que no Capítulo 5, ao descrevermos os teoremas que enunciam alguma propriedade sobre um modelo bipartido de intervalos M , também consideramos o enunciado onde toda ocorrência de $A(M)$ é trocada por $B(M)$ e vice-versa.

Na Seção 6.1, apresentamos a notação α - β , que é a nossa principal ferramenta para descrevermos as propriedades relevantes para a prova da caracterização da classe dos grafos

biclique de modelos bipartidos de intervalos. A Seção 6.2 apresenta, em termos da notação α - β , identidades de bicliques do modelo bipartido de intervalos.

Introduzimos o conceito de “vãos” e “centros” de bicliques na Seção 6.3. Falamos de propriedades de bicliques maximais do modelo em termos de “vãos” e “centros” na Seção 6.4.

Na Seção 6.5, descrevemos propriedades relacionadas com ordens de eventos da notação α - β entre bicliques maximais de acordo com a ocorrência de “centros” ou “vãos”. Com base no que é discutido até então, mostramos propriedades relacionadas com ordens de bicliques maximais disjuntas do modelo na Seção 6.6.

Por fim, descrevemos a ordem parcial da prova de caracterização na Seção 6.7 e, a partir dos resultados das demais seções, mostramos que ela só admite comparabilidade se, e somente se, as bicliques maximais são disjuntas.

6.1 Notação α - β

A notação α - β tem como objetivo descrever ordens de eventos de intervalos de bicliques que, por sua vez, descrevem informações de possíveis vão e centros. A notação é um conjunto de funções sobre as bicliques, ou até mesmo subconjuntos de intervalos, em que cada uma das funções tem imagem no conjunto de eventos do modelo e traz, através de sua representação visual, informação sobre:

- A parte correspondente ao intervalo do evento (parte $A(M)$ ou parte $B(M)$);
- O tipo de evento (evento de início ou fim); e
- A posição do evento na sequência em relação aos demais eventos do mesmo tipo (eventos mais internos ou mais externos).

Definição 24. Para $S \subseteq (A(M) \cup B(M))$, denominamos como notação α - β as seguintes funções

$$\begin{aligned} \alpha_s^+(S) &:= e \in \{0\} \times (A(M) \cap S) \text{ onde } e \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d, \forall d \in (A(M) \cap S) \\ \alpha_s^-(S) &:= e \in \{0\} \times (A(M) \cap S) \text{ onde } s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e, \forall d \in (A(M) \cap S) \\ \alpha_f^+(S) &:= e \in \{1\} \times (A(M) \cap S) \text{ onde } f_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e, \forall d \in (A(M) \cap S) \\ \alpha_f^-(S) &:= e \in \{1\} \times (A(M) \cap S) \text{ onde } e \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d, \forall d \in (A(M) \cap S) \\ \beta_s^+(S) &:= e \in \{0\} \times (B(M) \cap S) \text{ onde } e \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d, \forall d \in (B(M) \cap S) \\ \beta_s^-(S) &:= e \in \{0\} \times (B(M) \cap S) \text{ onde } s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e, \forall d \in (B(M) \cap S) \\ \beta_f^+(S) &:= e \in \{1\} \times (B(M) \cap S) \text{ onde } f_d \leq_{\mathbb{E}(M)} e, \forall d \in (B(M) \cap S) \\ \beta_f^-(S) &:= e \in \{1\} \times (B(M) \cap S) \text{ onde } e \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d, \forall d \in (B(M) \cap S). \end{aligned}$$

Através da notação, podemos descrever a parte correspondente ao intervalo pelo uso do símbolo α (se for a parte $A(M)$) ou β (se for a parte $B(M)$). Descrevemos também o tipo de evento através do símbolo subscrito s (para evento de início) ou f (para evento de fim).

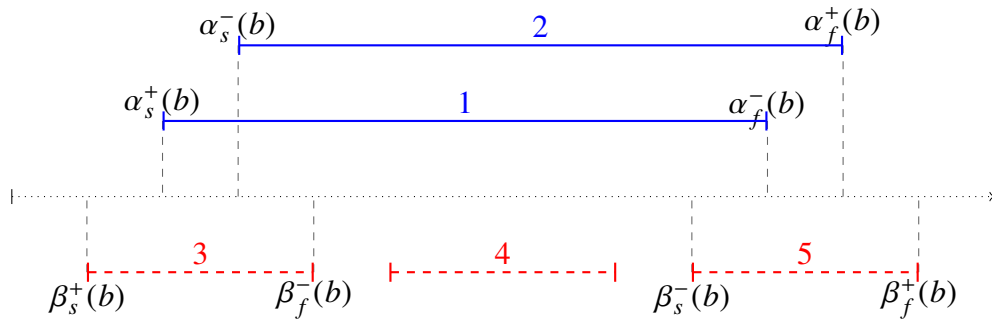


Figura 6.1: Identificação dos eventos da notação α - β numa biclique

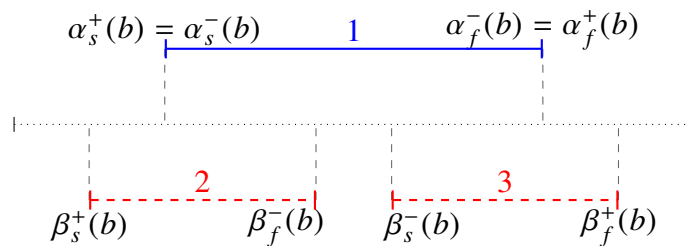


Figura 6.2: Biclique com eventos mais internos e mais externos do mesmo tipo que são os mesmos em uma de suas partes

Os símbolos sobrescritos “+” e “-” descrevem a posição do evento em relação aos eventos do mesmo tipo na sequência $\mathbb{E}(M)$, significando, respectivamente, “mais externo” e “mais interno”. Tal representação da posição relativa na sequência, cuja interpretação depende do tipo de evento, foi preferida a representações de informações de natureza absoluta (como “mais à esquerda” ou “mais à direita”) pois demonstra ser mais direta para a identificação de vãos e centros a partir da leitura, dos quais os únicos eventos de interesse são os mais internos (representados por “-” sobrescrito).

Tomamos, como exemplo, a biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . O evento denotado por $\alpha_s^-(b)$ é um evento de início (representado pelo s subscrito) cujo intervalo correspondente pertence à parte $A(M)$ da biclique (representado pelo α). Também temos que o evento de início é o “mais interno”, isto é, ocorre após os demais eventos de início da biclique.

A Figura 6.1 ilustra um modelo bipartido de intervalos M tal que $A(M) = \{1, 2\}$, $B(M) = \{3, 4, 5\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_3, s_1, s_2, f_3, s_4, f_4, s_5, f_1, f_2, f_5)$. Sua única biclique maximal é $b = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e os eventos que compõem sua notação α - β são $\alpha_s^+(b) = s_1$, $\alpha_s^-(b) = s_2$, $\alpha_f^-(b) = f_1$, $\alpha_f^+(b) = f_2$, $\beta_s^+(b) = s_3$, $\beta_s^-(b) = s_5$, $\beta_f^-(b) = f_3$ e $\beta_f^+(b) = f_5$.

Como consequência da definição, se a biclique possui apenas um intervalo em uma das partes, temos que existe equivalência entre o evento de início mais interno com o mais externo, assim como entre o evento de fim mais interno com o mais externo.

A Figura 6.2 ilustra um modelo bipartido de intervalos M tal que $A(M) = \{1\}$, $B(M) = \{2, 3\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_2, s_1, f_2, s_3, f_1, f_3)$. Sua única biclique maximal é $b = \{1, 2, 3\}$ e, como a parte $A(M)$ possui apenas um intervalo, temos s_1 como $\alpha_s^+(b) = \alpha_s^-(b)$ e f_1 como $\alpha_f^-(b) = \alpha_f^+(b)$.

6.2 Identidades de Bicliques

Enquanto a notação α - β nos permite descrevermos ordens de ocorrência de alguns dos eventos da biclique, a natureza das bicliques impõe restrições em tais eventos.

Uma das restrições é a de que, para cada parte, o evento de início mais à esquerda ocorre antes do evento de fim mais à esquerda. Enunciamos tal fato pelo seguinte lema.

Lema 9. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Vale que*

$$\alpha_s^+(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Prova. Considere o intervalo d relacionado com o evento $\alpha_f^-(b)$, isto é, tal que $f_d = \alpha_f^-(b)$.

Como M é um modelo bipartido de intervalos, temos que todo evento de início ocorre antes de seu respectivo evento de fim, isto é,

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Pela definição da notação α - β , temos que $\alpha_s^+(b)$ deve ocorrer antes dos demais eventos de início dos intervalos de $b \cap A(M)$, isto é,

$$\alpha_s^+(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d.$$

Logo,

$$\alpha_s^+(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

□

De forma análoga, para cada parte, o evento de início mais à direita ocorre antes do evento de fim mais à direita. Enunciamos tal fato em nosso próximo lema.

Lema 10. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Vale que*

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b).$$

Prova. Considere o intervalo d relacionado com o evento $\alpha_s^-(b)$, isto é, tal que $s_d = \alpha_s^-(b)$.

Como M é um modelo bipartido de intervalos, temos que todo evento de fim ocorre depois de seu respectivo evento de início, isto é,

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Pela definição da notação α - β , temos que $\alpha_f^+(b)$ ocorre após todos os demais eventos de fim dos intervalos de $b \cap A(M)$, isto é,

$$f_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b).$$

Logo,

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b).$$

□

Uma biclique requer, para ambas as partes, que todo intervalo de uma das partes tenha intersecção não-vazia com os intervalos da outra parte. Com isso, temos que o evento de fim do intervalo não pode ocorrer antes do evento de início de algum intervalo da parte contrária. Isso nos traz algumas limitações quanto à ordem de alguns dos eventos da notação α - β , como descrito pelo seguinte lema.

Lema 11. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Vale que*

$$\alpha_s^+(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^+(b).$$

Prova. Por definição da notação α - β , temos que

$$\alpha_s^+(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b)$$

e que

$$\beta_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b).$$

Se $\beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b)$, o intervalo relacionado a $\beta_f^-(b)$ não intersecta o intervalo relacionado a $\alpha_s^-(b)$. Como b é biclique e ambos intervalos estão em diferentes partes, temos que isso não ocorre. Logo,

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b).$$

E, portanto,

$$\alpha_s^+(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^+(b).$$

□

6.3 Vãos e Centros

Algumas bicliques de um modelo bipartido de intervalos possuem a propriedade de, para uma das partes, seu evento de fim mais interno ocorrer antes de seu evento de início mais interno. Os intervalos dessa parte não precisam necessariamente cobrir a região para que haja intersecção com todos os intervalos da outra parte. Chamamos tal região da biclique de “vão” e a definimos a seguir.

Definição 25. O *vão* de uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M é a região da sequência $\mathbb{E}(M)$ após o primeiro evento de fim (ou o fim mais interno) de uma das partes e antes o último evento de início (ou o início mais interno) da mesma parte. Dizemos que b possui vão em $A(M)$ ou $B(M)$.

A Figura 6.3 ilustra um modelo bipartido de intervalos M tal que $A(M) = \{1, 2\}$, $B(M) = \{3, 4, 5\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_3, s_1, s_2, f_3, s_4, f_4, s_5, f_1, f_2, f_5)$. O modelo M possui uma única biclique maximal $b = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e esta, por sua vez, possui vão em $B(M)$, o qual é representado pela região em destaque na figura. O vão é delimitado à esquerda pelo evento $\beta_f^-(b) = f_3$ e à direita pelo evento $\beta_s^-(b) = s_5$.

Onde o vão é delimitado pelo evento de fim mais interno à esquerda e pelo evento de início mais interno à direita, podemos definir a região de uma das partes da biclique onde o contrário

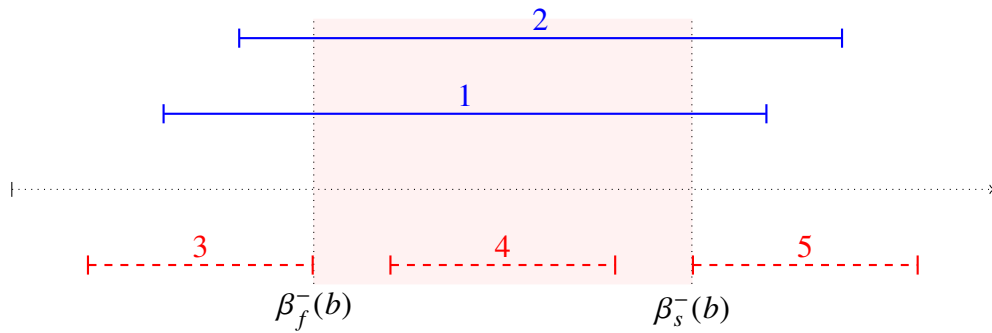


Figura 6.3: Vão de uma biclique

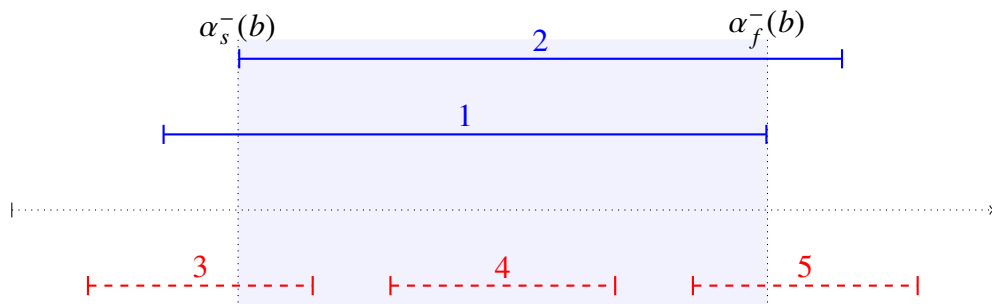


Figura 6.4: Centro de uma biclique

ocorre; uma região que à esquerda é delimitada pelo evento de início mais interno e à direita é delimitada pelo evento de fim mais interno.

Nessa região, existe intersecção não-vazia com todos os intervalos dessa parte. Chamamos a região de “centro” e a definimos a seguir.

Definição 26. O *centro* de b é a região da sequência $\mathbb{E}(M)$ após o último evento de início (ou o início mais interno) de uma das partes e antes do primeiro evento de fim (ou o fim mais interno) da mesma parte. Dizemos que b possui centro em $A(M)$ ou $B(M)$.

A Figura 6.4 ilustra o mesmo modelo bipartido de intervalos M representado pela Figura 6.3. Denominando sua única biclique maximal por $b = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que b possui centro em $A(M)$, o qual é representado pela região em destaque. O centro é delimitado à esquerda pelo evento $\alpha_s^-(b) = s_2$ e à direita pelo evento $\alpha_f^-(b) = f_1$.

Cada parte de uma biclique do modelo pode ter ou um vão ou centro, tendo que a ordem dos eventos que delimitam tal região é o que define sua natureza. Entretanto, nosso próximo teorema enuncia que, se a biclique possui um vão em uma das partes, a outra parte tem necessariamente um centro.

Teorema 12. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Se b possui vão em uma das partes, a outra parte possui um centro, isto é,*

$$\alpha_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) \implies \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b)$$

e

$$\beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b) \implies \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Prova. Se $\alpha_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b)$ acontece, pelo Lema 11, temos que

$$\beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b).$$

Logo, temos que

$$\alpha_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) \implies \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b).$$

De maneira análoga, temos que

$$\beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b) \implies \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

□

Nosso próximo corolário enuncia que toda biclique possui algum centro em alguma de suas partes.

Corolário 13. *Toda biclique de um modelo bipartido de intervalos possui, pelo menos, um centro.*

Prova. Consequência direta do Teorema 12. □

A biclique descrita pelas Figuras 6.3 e 6.4 possui um vão em $B(M)$ que está totalmente incluso no centro em $A(M)$. Porém, mostramos que toda biclique que possui um vão possui tal propriedade em nosso próximo lema.

Lema 14. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Se b possui centro em uma das partes e um vão na outra, vale que o centro cobre o vão.*

Prova. Pelo Lema 11, temos que

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Considere que b possui centro em $A(M)$ e vão em $B(M)$. Temos que

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b) \text{ e } \beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b).$$

Logo, temos que

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

De maneira análoga, temos que, se b possui centro em $B(M)$ e vão em $A(M)$, seu centro também cobre seu vão. □

Como acabamos de demonstrar, vãos de bicliques estão propriamente contidos em centros de suas respectivas bicliques. Nosso próximo lema enuncia que, se uma biclique possui centros em ambas as partes, então ambos seus centros se intersectam.

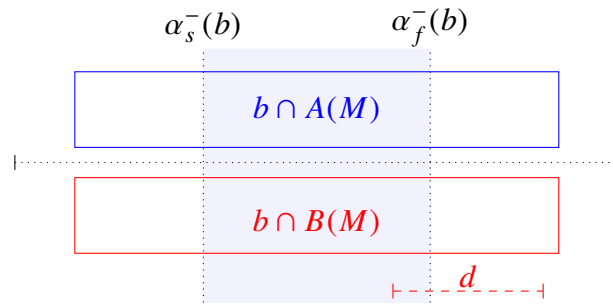


Figura 6.5: Intervalo que intersecta centro na parte contrária de uma biclique

Lema 15. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M . Se b possui centro em ambas as partes, ambos centros se intersectam.*

Prova. Pelo Lema 11, temos que

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Como $\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b)$ e $\beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b)$, temos que existe intersecção entre os centros de b . \square

6.4 Propriedades de Bicliques Maximais

Informalmente, podemos dizer que construímos bicliques em modelos bipartidos de intervalos “selecionando” intervalos de alguma das partes que possuem intersecção não-vazia com intervalos da outra parte. Entretanto, bicliques maximais são compostas pelo máximo de intervalos que podemos “selecionar”, isto é, se houver algum intervalo que também intersecta todos os intervalos de sua parte contrária até então “selecionados”, tal intervalo também deve ser “selecionado”.

A forma escolhida para descrevermos propriedades de bicliques maximais é de apresentar uma biclique qualquer e um intervalo que não pertence à biclique e mostrar que, se tal intervalo satisfaz alguma forma de interação com o centro ou o vão dessa biclique, existe uma biclique composta pela biclique e pelo intervalo apresentados.

Tal forma de enunciar tal propriedade nos serve para certificar a propriedade de maximalidade de alguma biclique num cenário envolvendo tal biclique e algum intervalo. Essa técnica é usada como argumento para provas por contradição, invalidando a maximalidade de alguma biclique supostamente maximal, de alguns dos teoremas apresentados nas seguintes seções deste capítulo.

A primeira forma de interação entre uma biclique e um intervalo que apresentamos é de uma biclique com um centro em uma de suas partes e um intervalo da parte contrária que intersecta tal centro. A Figura 6.5 ilustra tal cenário com uma biclique b de um modelo M que possui um centro em $A(M)$ e um intervalo $d \in B(M)$ que intersecta o centro. A região destacada entre os eventos $\alpha_s^-(b)$ e $\alpha_f^-(b)$ representa o centro em $A(M)$ de b .

Teorema 16. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M .*

Se b possui centro em $A(M)$ e existe um intervalo $d \in B(M)$ que intersecta o centro de b em $A(M)$, então $\{d\} \cup b$ é uma biclique no modelo M .

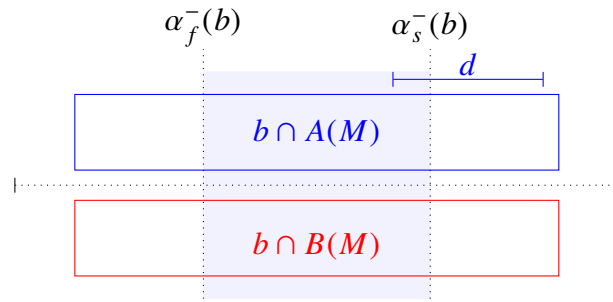


Figura 6.6: Intervalo que intersecta o vão de uma biclique pela mesma parte

Prova. Como $d \in B(M)$ intersecta o centro de b em $A(M)$, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b) \text{ e } \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Como s_d ocorre antes do primeiro fim e f_d ocorre depois do primeiro início, temos que d possui intersecção com todos os intervalos em $b \cap A(M)$. Portanto, temos que $\{d\} \cup b$ é uma biclique. \square

A segunda forma de interação que apresentamos é de uma biclique com um vão em uma de suas partes e um intervalo que pertence à mesma parte que o vão da biclique. A Figura 6.6 ilustra tal cenário com uma biclique b de um modelo M que possui um vão em $A(M)$ e um intervalo $d \in A(M)$ que intersecta o vão. A região destacada entre os eventos $\alpha_f^-(b)$ e $\alpha_s^-(b)$ representa o vão em $A(M)$ de b .

Teorema 17. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M .*

Se b possui vão em $A(M)$ e existe um intervalo $d \in A(M)$ que intersecta o vão de b em $A(M)$, então $\{d\} \cup b$ é uma biclique do modelo M .

Prova. Se d intersecta o vão em $A(M)$ de b , temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) \text{ e } \alpha_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Pelo Teorema 12, temos que b tem centro em $B(M)$, isto é,

$$\beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b).$$

Pelo Lema 11, temos que

$$\beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b).$$

Logo, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Ou seja, temos que d intersecta o centro de b em $B(M)$. Pelo Teorema 16, temos que $\{d\} \cup b$ é uma biclique em M . \square

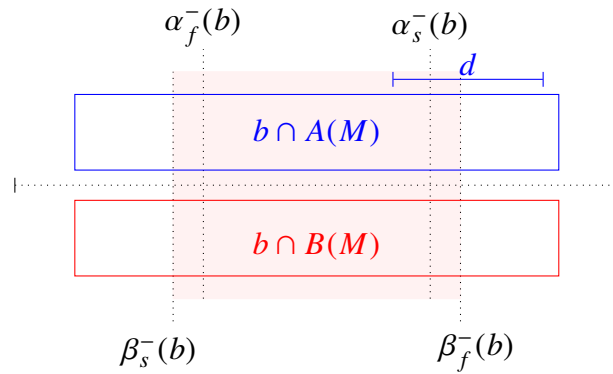


Figura 6.7: Intervalo que intersecta o vão de uma biclique pela mesma parte também intersecta o centro da parte contrária

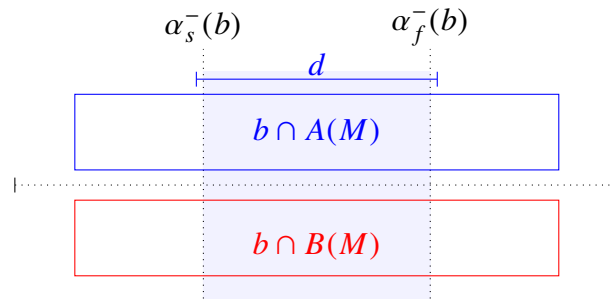


Figura 6.8: Intervalo que cobre o centro de uma biclique da mesma parte

Como acabamos de demonstrar, podemos transformar o segundo cenário no primeiro através da propriedade de que todo vão está propriamente incluso no centro na parte contrária de sua biclique. A Figura 6.7 ilustra o cenário que acabamos de discutir com uma biclique b de um modelo M que possui um vão $A(M)$ e um intervalo $d \in A(M)$ que intersecta o vão. A figura também mostra o centro de b em $B(M)$, delimitado pelos eventos $\beta_s^-(b)$ e $\beta_f^-(b)$ e destacado pela região entre tais eventos.

A terceira forma de interação que apresentamos é de uma biclique com centro em uma das partes e um intervalo que pertence à mesma parte cobrindo o centro. A Figura 6.8 ilustra o cenário com uma biclique b de um modelo M que possui centro em $A(M)$ e um intervalo $d \in A(M)$ que cobre o centro. A região destacada entre os eventos $\alpha_s^-(b)$ e $\alpha_f^-(b)$ representa o centro em $A(M)$ de b .

Teorema 18. *Seja uma biclique b de um modelo bipartido de intervalos M .*

Se b possui centro em $A(M)$ e existe um intervalo $d \in A(M)$ que cobre o centro de b em $A(M)$, então $\{d\} \cup b$ é uma biclique do modelo M .

Prova. Como d cobre o centro de b em $A(M)$, temos que

$$s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b) \text{ e } \alpha_f^-(b) \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Assuma que b possui centro em $B(M)$. Pelo Lema 15, temos que ambos centros de b se intersectam, isto é,

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

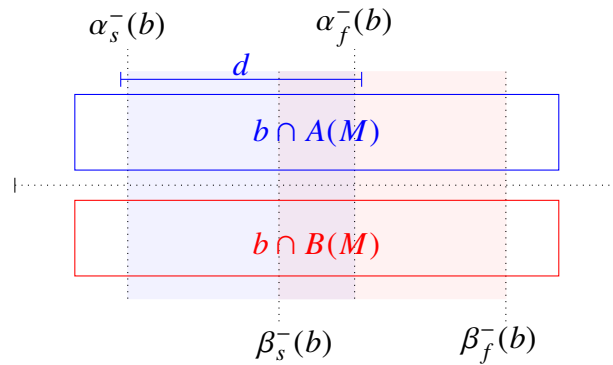


Figura 6.9: Intervalo que cobre o centro de uma biclique pela mesma parte intersecta o centro da parte contrária

Logo, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Ou seja, temos que d intersecta o centro de b em $B(M)$. Pelo Teorema 16, temos que existe uma biclique $\{d\} \cup b$ no modelo M .

Assuma que b possui vão em $B(M)$. Pelo Lema 14, temos que o centro em $A(M)$ cobre o vão em $B(M)$, isto é,

$$\alpha_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b).$$

Como d cobre o centro em $A(M)$, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b) \text{ e } \beta_s^-(b) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Ou seja, temos que d intersecta todos os intervalos de $b \cap B(M)$.

Logo, temos que $\{d\} \cup b$ é uma biclique do modelo M . □

Como acabamos de demonstrar, se assumirmos que a parte contrária a do centro possui um centro, temos que existe uma intersecção entre ambos os centros. O intervalo que cobre o centro, por sua vez, intersecta o centro da parte contrária, transformando o terceiro cenário de interação entre biclique e intervalo no primeiro. A Figura 6.9 ilustra tal transformação com uma biclique b de um modelo M que possui centros em ambas as partes $A(M)$ e $B(M)$ e um intervalo $d \in A(M)$ que cobre o centro em $A(M)$ de b . As regiões delimitadas pelos pares $\alpha_s^-(b) - \alpha_f^-(b)$, $\beta_s^-(b) - \beta_f^-(b)$ e $\beta_s^-(b) - \alpha_f^-(b)$ representam, respectivamente, o centro em $A(M)$ de b , o centro em $B(M)$ de b e a intersecção de ambos os centros.

Se assumirmos que a parte contrária a do centro possui um vão, temos que tal vão está propriamente contido no centro. Por consequência, o intervalo que cobre o centro também cobre o vão. A Figura 6.10 ilustra tal caso com uma biclique b de um modelo M que possui centro em $A(M)$ e vão em $B(M)$ e um intervalo $d \in A(M)$ que cobre o centro. A região delimitada pelos eventos $\alpha_s^-(b)$ e $\alpha_f^-(b)$ representa o centro de b e a região delimitada pelos eventos $\beta_f^-(b)$ e $\beta_s^-(b)$ representa o vão.

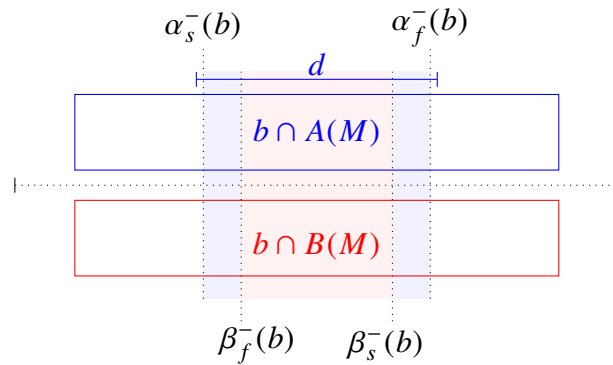


Figura 6.10: Intervalo que cobre o centro de uma biclique pela mesma parte também cobre o vão da parte contrária

6.5 Separadores de Biclíques

Um conceito que inspira o Algoritmo 1 é o de que biclíques distintas são separadas por um evento de fim de uma das partes de uma das biclíques que ocorre antes de um evento de início da outra parte na outra biclique.

O algoritmo, ao processar um evento de fim, faz uma cópia para cada potencial biclique que contém o intervalo relacionado com tal evento, removendo o intervalo da cópia, e fecha a parte contrária a do intervalo nas potenciais biclíques originais. Esse processamento implementa a ideia de que biclíques distintas são separadas por esses eventos de fim e início de partes contrárias; por “separadores” de biclíques.

Definição 27. Um *separador* de duas biclíques é um par de eventos de fim e de início tais que ambos os intervalos relacionados estão em biclíques diferentes e em diferentes partes e o evento de fim ocorre antes do evento de início.

Como basta um separador para mostrar que duas biclíques num modelo bipartido de intervalos são distintas, pois ambos os intervalos relacionados não possuem intersecção e impedem que estejam juntos na mesma biclique, os separadores são suficientes para descrevermos propriedades relacionadas com eventos entre biclíques maximais disjuntas.

Enquanto mostrar que duas biclíques são distintas requer apenas apresentar um separador, mostrar que duas biclíques maximais são disjuntas entre si requer que escolhamos tipos específicos de eventos para seus separadores. O próximo teorema descreve quais os eventos envolvidos como separadores de duas biclíques maximais disjuntas.

Teorema 19. *Sejam biclíques maximais b_1 e b_2 do modelo bipartido de intervalos M .*

Se b_1 possui centro em $A(M)$ e não possui intersecção com b_2 , então $\beta_s^+(b_2)$ ocorre depois do centro de b_1 em $A(M)$ ou $\beta_f^+(b_2)$ ocorre antes do centro de b_1 em $A(M)$, isto é,

$$b_1 \cap b_2 = \emptyset \text{ e } \alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1) \implies \alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2) \text{ ou } \beta_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1).$$

Prova. Pelo Teorema 16, temos que, se existe algum intervalo $d \in (b_2 \cap B(M))$ que intersecta o centro em $A(M)$ de b_1 , então $\{d\} \cup b_1$ é uma biclique do modelo M . Como b_1 é maximal, tal intervalo não existe. \square

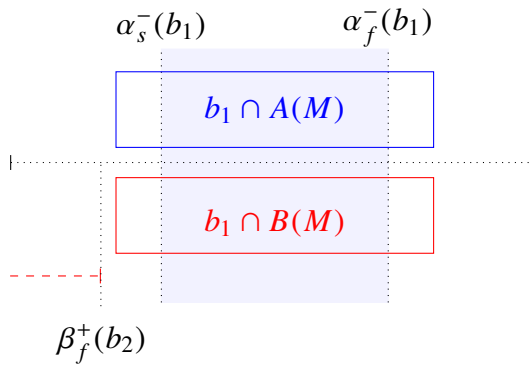


Figura 6.11: Evento $\beta_f^+(b_2)$ que ocorre antes do centro em $A(M)$ de b_1

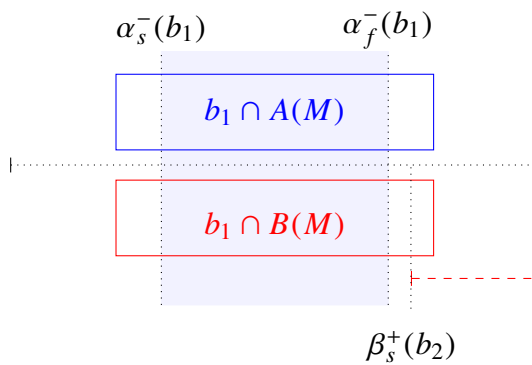


Figura 6.12: Evento $\beta_s^+(b_2)$ que ocorre depois do centro em $A(M)$ de b_1

Como acabamos de demonstrar, entre duas bicliques maximais disjuntas, não pode haver intersecção entre o centro de uma das partes de uma das bicliques com o intervalo de um dos eventos mais externos da outra parte na outra biclique, pois um dos eventos do centro e o evento mais externo descrevem o separador.

A Figura 6.11 ilustra a biclique maximal b_1 e um dos intervalos da biclique maximal b_2 , disjunta de b_1 , de um modelo bipartido de intervalos M . Os eventos $\beta_f^+(b_2)$ e $\alpha_s^-(b_1)$ descrevem o separador de b_1 e b_2 . A região delimitada pelos eventos $\alpha_s^-(b_1)$ e $\alpha_f^-(b_1)$ descreve o centro em $A(M)$ de b_1 e o segmento em tracejado descreve o intervalo associado a $\beta_f^+(b_2)$.

A Figura 6.12 ilustra a biclique maximal b_1 e um dos intervalos da biclique maximal b_2 , disjunta de b_1 , de um modelo bipartido de intervalos M . Os eventos $\alpha_f^-(b_1)$ e $\beta_s^+(b_2)$ descrevem o separador de b_1 e b_2 . A região delimitada pelos eventos $\alpha_s^-(b_1)$ e $\alpha_f^-(b_1)$ descreve o centro em $A(M)$ de b_1 e o segmento em tracejado descreve o intervalo associado a $\beta_s^+(b_2)$. Note que, mesmo disjuntas, pode haver intersecção entre o intervalo de $\beta_s^+(b_2)$ e intervalos de $b_1 \cap A(M)$ desde que a intersecção ocorra depois de $\alpha_f^-(b_1)$.

A forma que temos de descrever o separador entre duas bicliques maximais disjuntas depende do conhecimento do centro de uma delas. As duas possibilidades de separadores que nos são fornecidas descrevem o que parece representar uma ordem entre as bicliques; uma informação de que uma biclique ocorre antes de outra.

Para os próximos lemas, vamos restringir uma específica ordem de ocorrência entre dois eventos de intervalos de uma das partes e, para cada caso de um vão ou um centro ocorrer em uma

das bicliques nessa mesma parte, mostrar que apenas uma das duas possibilidades de separadores ocorre.

Considere as bicliques maximais disjuntas b_1 e b_2 do modelo bipartido de intervalos M . Se a parte escolhida para nossa restrição for $A(M)$, então nossa restrição pode ser descrita como $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$. Note que, para um par de bicliques maximais disjuntas, ambas devem assumir o papel de b_1 ou de b_2 por não possuírem intersecção.

Lema 20. *Sejam bicliques maximais disjuntas b_1 e b_2 do modelo bipartido de intervalos M .*

Se b_1 possui centro em $A(M)$ e $\alpha_s^-(b_1)$ ocorre antes de $\alpha_s^+(b_2)$, então $\alpha_f^-(b_1)$ ocorre antes de $\beta_s^+(b_2)$, isto é

$$(b_1 \cap b_2 = \emptyset) \text{ e } (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1)) \text{ e } (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)) \implies \alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

Prova. Pelo Lema 11, temos que

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^+(b_2).$$

Como $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^+(b_2).$$

Pelo Teorema 19, temos que

$$\alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2) \text{ ou } \beta_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1).$$

Como $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^+(b_2)$, temos que $\beta_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)$ não pode acontecer. Logo, vale que

$$\alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

□

Lema 21. *Sejam b_1 e b_2 bicliques maximais disjuntas do modelo bipartido de intervalos M .*

Se b_1 possui vão em $A(M)$ e $\alpha_s^-(b_1)$ ocorre antes de $\alpha_s^+(b_2)$, então vale que $\beta_f^-(b_1)$ ocorre antes de $\alpha_s^+(b_2)$, isto é, vale que

$$(b_1 \cap b_2 = \emptyset) \text{ e } (\alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)) \text{ e } (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)) \implies \beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2).$$

Prova. Pelo Teorema 12, temos que b_1 tem centro em $B(M)$, isto é, que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_1).$$

Pelo Lema 11, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1).$$

Portanto,

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1). \tag{6.1}$$

Pelo Teorema 19, temos que

$$\beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) \text{ ou } \alpha_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1).$$

Suponha que $\alpha_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1)$. Pelo Lema 9, temos que

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_2).$$

Isto é,

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_2). \quad (6.2)$$

Como $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, temos, por 6.1, que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2).$$

Por 6.2, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_2).$$

Logo, temos que $\alpha_f^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1)$ não acontece.

Portanto, vale que

$$\beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2).$$

□

6.6 Ordenações de Bicliques Disjuntas

Ao fim da seção anterior, apresentamos uma restrição entre eventos de duas bicliques maximais disjuntas e mostramos duas possíveis ordens de ocorrência entre dois outros eventos como consequência da ordem introduzida. Nesta seção, usamos tal restrição para demonstrarmos o aspecto de comparabilidade entre duas bicliques maximais disjuntas.

Em nosso próximo teorema, mostramos que tal restrição implica numa simetria com outros dois eventos na notação α - β .

Teorema 22. *Sejam bicliques maximais disjuntas b_1 e b_2 de um modelo bipartido de intervalos M .*

Se $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, então $\alpha_f^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2)$.

Prova. Como b_1 e b_2 são disjuntos, temos que

$$(\alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1)) \text{ ou } (\alpha_f^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2)).$$

Suponha que $\alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1)$. Pelo Lema 9, temos que

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2).$$

Logo, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2).$$

Portanto, pela nossa suposição, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1). \quad (6.3)$$

Sabemos que b_2 pode ter um centro ou um vão em $A(M)$, isto é, vale que

$$(\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2)) \text{ e } (\alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)).$$

Suponha que b_2 tem centro em $A(M)$. Como $\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)$ e, pela premissa $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2).$$

Logo, podemos complementar 6.3 com a posição de $\alpha_s^-(b_2)$. Portanto, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1).$$

Seja $d \in A(M) \cap b_1$ o intervalo relacionado com o evento $\alpha_f^+(b_1)$. Como $s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)$, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Portanto, o intervalo d cobre o centro de b_2 em $A(M)$. Pelo Teorema 18, temos que existe uma biclique $\{d\} \cup b_2$ no modelo M . Porém, d é intervalo de b_1 e $b_1 \cap b_2 = \emptyset$. Logo, b_2 não é maximal. Temos, então, que b_2 não tem centro em $A(M)$.

Suponha que b_2 tem vão em $A(M)$. Da mesma forma que o caso anterior, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2).$$

Logo, podemos complementar 6.3 com a posição de $\alpha_s^-(b_2)$. Portanto, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1).$$

Considere, da mesma maneira, o intervalo $d \in A(M) \cap b_1$ que está relacionado com o evento $\alpha_f^+(b_1)$. Logo, temos que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Pelo Teorema 17, temos que $\{d\} \cup b_2$ é uma biclique de M . Portanto, temos que b_2 não é maximal. Temos que b_2 não tem vão em $A(M)$.

Como b_2 não pode ter centro nem vão em $A(M)$, temos que nossa suposição $\alpha_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^+(b_1)$ é falsa.

Logo, temos que

$$\alpha_f^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_2).$$

□

Outra consequência em assumir a restrição é que, no caso de bicliques disjuntas, uma ordem similar de ocorrência de eventos ocorre na parte oposta, envolvendo também o evento de início mais interno de uma das bicliques e o evento de início mais externo de outra. Enunciamos tal propriedade em nosso próximo teorema.

Teorema 23. *Sejam bicliques maximais disjuntas b_1 e b_2 do modelo bipartido de intervalos M .*

Se $\alpha_s^-(b_1)$ ocorre antes de $\alpha_s^+(b_2)$, então $\beta_s^-(b_1)$ ocorre antes de $\beta_s^+(b_2)$.

Prova. Vamos considerar os casos que b_1 possui centro ou vão em $A(M)$.

Para o caso de b_1 ter centro em $A(M)$, isto é, que $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1)$, temos, pelo Lema 20, que

$$\alpha_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

Pelo Lema 11, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1).$$

Logo,

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

Para o caso de b_1 ter vão em $A(M)$, temos, pelo Teorema 12, que b_1 tem centro em $B(M)$, isto é,

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_1). \quad (6.4)$$

Pelo Lema 21, vale que

$$\beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2). \quad (6.5)$$

Pelo Lema 11, vale que

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2). \quad (6.6)$$

Por 6.5 e 6.6, temos que

$$\beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2).$$

Por 6.4, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2).$$

Suponha que $\beta_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1)$. Temos, então, que

$$\beta_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2).$$

Considere o intervalo $d \in B(M) \cap b_2$ relacionado com o evento de início $\beta_s^+(b_2)$, isto é, que $s_d = \beta_s^+(b_2)$. Temos que $\beta_f^-(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d$. Portanto, vale que

$$s_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} f_d.$$

Pelo Teorema 18, temos que $\{d\} \cup b_1$ é uma biclique de M . Como $d \notin b_1$, temos que b_1 não é maximal. Logo, temos que $\beta_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1)$ não acontece.

Portanto,

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

□

Note que ambas as ordens de ocorrência de eventos são parte dos critérios de nossa ordem parcial de bicliques maximais para a caracterização. O teorema acima garante que ambas ordens de eventos ocorrem quando consideramos bicliques disjuntas. Em nosso próximo teorema, enunciaremos que ambas as bicliques atendem aos critérios da ordem parcial apenas quando são disjuntas, isto é, ambas as bicliques são comparáveis se, e somente se, possuem intersecção vazia.

Teorema 24. *Sejam bicliques maximais distintas b_1 e b_2 do modelo bipartido de intervalos M . Seja o predicado $p(b_1, b_2)$ definido como*

$$\begin{aligned} & (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) \text{ e } \beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2)) \text{ ou} \\ & (\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1) \text{ e } \beta_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_1)) . \end{aligned}$$

Vale que

$$b_1 \cap b_2 = \emptyset \iff p(b_1, b_2).$$

Prova. Vamos provar que

$$b_1 \cap b_2 = \emptyset \implies p(b_1, b_2).$$

Como $\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)$ e $\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) & \implies \alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) \\ & \implies \alpha_s^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2). \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1) \implies \alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1).$$

Isto é, temos que $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$ e $\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1)$ não acontecem simultaneamente, pois assumir uma das ordens contradiz a outra. Isso nos permite separar as duas partes da disjunção de $p(b_1, b_2)$ em casos que não ocorrem simultaneamente.

Assumindo que $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, temos, pelo Teorema 23, que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2).$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} (b_1 \cap b_2 = \emptyset) \text{ e } (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)) & \implies (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)) \text{ e } (\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2)) \\ & \implies p(b_1, b_2). \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que

$$\begin{aligned} (b_1 \cap b_2 = \emptyset) \text{ e } (\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1)) & \implies (\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1)) \text{ e } (\beta_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_1)) \\ & \implies p(b_1, b_2). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$b_1 \cap b_2 = \emptyset \implies p(b_1, b_2).$$

Vamos provar que se b_1 e b_2 possuem intersecção entre si, então o predicado $p(b_1, b_2)$ é falso, isto é, que

$$b_1 \cap b_2 \neq \emptyset \implies \overline{p(b_1, b_2)}.$$

Se duas bicliques maximais possuem intersecção, então existe algum intervalo $d \in b_1 \cap b_2$. Vamos assumir que d pertence a $A(M)$.

Temos que

$$\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1).$$

Também temos que

$$\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2).$$

Portanto, vale que

$$(\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)) \text{ e } (\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1))$$

De maneira análoga, se d pertence a $B(M)$, temos que

$$(\beta_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2)) \text{ e } (\beta_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1))$$

Logo, vale que

$$\begin{aligned} & ((\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)) \text{ e } (\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1))) \\ \text{ou } & ((\beta_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2)) \text{ e } (\beta_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1))). \end{aligned}$$

Por distribuição, temos que

$$\begin{aligned} & ((\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)) \text{ ou } (\beta_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2))) \\ \text{e } & ((\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)) \text{ ou } (\beta_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1))) \\ \text{e } & ((\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)) \text{ ou } (\beta_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2))) \\ \text{e } & ((\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)) \text{ ou } (\beta_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_1))) \\ & \implies \overline{p(b_1, b_2)}. \end{aligned}$$

Temos que

$$b_1 \cap b_2 \neq \emptyset \implies \overline{p(b_1, b_2)}.$$

Por contrapositiva, temos que

$$p(b_1, b_2) \implies b_1 \cap b_2 = \emptyset.$$

Portanto, temos que

$$b_1 \cap b_2 = \emptyset \iff p(b_1, b_2).$$

□

6.7 Caracterização dos Grafos Biclique

Com o critério de comparação apresentado na última seção, onde mostramos que duas bicliques são comparáveis apenas se são disjuntas, podemos, então introduzir uma ordem baseada nesse critério. A prova da comparabilidade entre bicliques apresentada leva em consideração os dois sentidos da ordem entre elas; quando a primeira acontece antes de uma segunda ou quando a segunda acontece antes da primeira.

O critério de comparabilidade entre as bicliques apresentado é uma disjunção lógica, ou um “ou”, entre os dois sentidos. Para transformá-la numa ordem parcial, escolhamos apenas um dos sentidos e incluímos, artificialmente, o critério de que são comparáveis se as bicliques são a mesma.

Definição 28. Seja um modelo bipartido de intervalos M . A relação $\mathcal{R}_M \subseteq \mathcal{B}_M \times \mathcal{B}_M$ é formada por elementos (b_1, b_2) tais que ambas bicliques maximais b_1 e b_2 de M são a mesma ou se tanto o início mais interno na parte $A(M)$ de b_1 ocorre antes do início mais externo da parte $A(M)$ de b_2 , assim como o início mais interno da parte $B(M)$ de b_1 ocorrer antes do início mais externo da parte $B(M)$ de b_2 , isto é, as bicliques b_1 e b_2 satisfazem

$$(b_1 = b_2) \text{ ou } (\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) \text{ e } \beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_2)) .$$

Nosso próximo teorema enuncia que a relação definida acima descreve uma ordem parcial sobre as bicliques maximais de um modelo bipartido de intervalos.

Teorema 25. A relação \mathcal{R}_M sobre um modelo bipartido de intervalos M é uma ordem parcial.

Prova. Vamos provar que a relação \mathcal{R}_M é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Como (b, b) pertence a \mathcal{R}_M , para toda biclique maximal b de M , temos que \mathcal{R}_M é reflexiva.

Para a antissimetria, vamos considerar duas bicliques maximais b_1 e b_2 de M .

Vamos provar que

$$b_1 \neq b_2 \implies ((b_1, b_2) \notin \mathcal{R}_M) \text{ ou } ((b_2, b_1) \notin \mathcal{R}_M) .$$

Assuma que $(b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M$. Como $b_1 \neq b_2$, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) .$$

Como $\alpha_s^+(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)$ e $\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)$, temos que

$$\alpha_s^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2) .$$

Como $\alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_1)$ não pode acontecer, temos que

$$b_1 \neq b_2 \text{ e } ((b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M) \implies ((b_2, b_1) \notin \mathcal{R}_M) . \quad (6.7)$$

De maneira análoga, temos que

$$b_1 \neq b_2 \text{ e } ((b_2, b_1) \in \mathcal{R}_M) \implies ((b_1, b_2) \notin \mathcal{R}_M). \quad (6.8)$$

Por 6.7 e 6.8, vale, portanto, que

$$b_1 \neq b_2 \implies ((b_1, b_2) \notin \mathcal{R}_M) \text{ ou } ((b_2, b_1) \notin \mathcal{R}_M).$$

Por contrapositiva, temos que

$$((b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M) \text{ e } ((b_2, b_1) \in \mathcal{R}_M) \implies b_1 = b_2.$$

Portanto, temos que \mathcal{R}_M é antissimétrica.

Para a prova da transitividade, considere três bicliques maximais b_1 , b_2 e b_3 de M .

Vamos provar que

$$((b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M) \text{ e } ((b_2, b_3) \in \mathcal{R}_M) \implies ((b_1, b_3) \in \mathcal{R}_M).$$

Para os casos onde existe igualdade entre bicliques ($b_1 = b_2$ ou $b_2 = b_3$), temos que a expressão já vale pelo consequente da implicação ser equivalente a, pelo menos, uma das condições.

Para o caso onde não há igualdade, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) \text{ e } \alpha_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_3).$$

Como $\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_2)$, temos que

$$\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_3).$$

De maneira análoga, também vale que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_3).$$

Logo, temos que

$$((b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M) \text{ e } ((b_2, b_3) \in \mathcal{R}_M) \implies ((b_1, b_3) \in \mathcal{R}_M).$$

Temos que \mathcal{R}_M é transitiva.

Portanto, temos que \mathcal{R}_M descreve uma ordem parcial. \square

Por fim, com a propriedade de comparabilidade entre bicliques maximais disjuntas e a ordem parcial que atende ao critério de comparabilidade, mostramos, pelo teorema a seguir, que o grafo de intersecção das bicliques maximais de um modelo bipartido de intervalos não admite aresta entre vértices que correspondem a bicliques que não se intersectam, isto é, que o grafo biclique de um grafo de bi-intervalos é de co-comparabilidade.

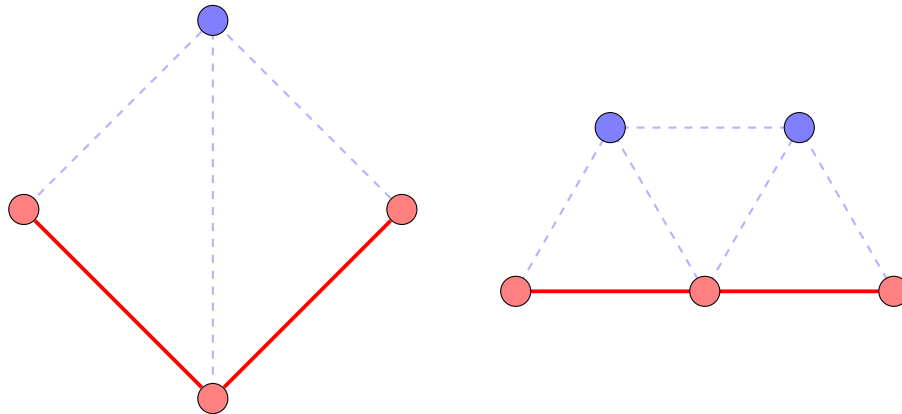


Figura 6.13: P_3 ocorre apenas em *diamantes* e *gemas* em grafos biclique

Corolário 26. Os grafos de intersecção das bicliques maximais de todo modelo bipartido de intervalos M são de co-comparabilidade.

Prova. Seja a relação \mathcal{R}_M sobre as bicliques maximais de M .

Pelo Teorema 25, temos que \mathcal{R}_M é uma ordem parcial sobre as bicliques maximais de M .

Sejam b_1 e b_2 bicliques maximais de M , temos, pelo Teorema 24, que

$$(b_1, b_2) \in \mathcal{R}_M \text{ ou } (b_2, b_1) \in \mathcal{R}_M \iff (b_1 = b_2) \text{ ou } (b_1 \cap b_2 = \emptyset).$$

Ou seja, as bicliques b_1 e b_2 são apenas comparáveis se, e somente se, são iguais ou a intersecção entre elas for vazia. \square

Note que o resultado apresentado no trabalho de Groshaus e Szwarcfiter (2010) implica que o grafo P_3 não é grafo biclique de grafo algum, pois P_3 ocorre apenas em *diamantes* ou *gemas* induzidas em grafos biclique. A figura 6.13 ilustra, respectivamente, o grafo *diamante* e o grafo *gema*, destacando a ocorrência de P_3 nesses grafos.

Como P_3 é um grafo de co-comparabilidade, temos que a classe de grafos biclique de grafos de bi-intervalos está propriamente contida na classe de grafos de co-comparabilidade.

7 Subgrafos Proibidos e Permitidos

Uma das formas de caracterizarmos uma classe de grafos é descrevendo estruturas que não podem ocorrer internamente entre seus vértices e/ou arestas. Essa forma de caracterização é conhecida como caracterização por subgrafos proibidos.

Um subgrafo permitido é uma estrutura interna entre os vértices e/ou arestas dos grafos de uma classe que podem ocorrer. Embora descrever subgrafos permitidos dificilmente leva a uma caracterização da classe, o estudo de tais estruturas permite investigar possíveis inclusões em outras classes de grafos, descartando aquelas que proíbem o subgrafo que é permitido na classe investigada.

Neste capítulo, apresentamos uma prova de que a classe dos grafos biclique dos modelos bipartidos de intervalos, ou dos grafos de bi-intervalos, não admite o $K_{1,4}$ como subgrafo induzido em seus grafos. Em seguida, mostramos duas estruturas permitidas na classe.

7.1 Subgrafos Proibidos

Mostramos, nesta seção, que os grafos biclique bi-intervalos não admitem um $K_{1,4}$ como subgrafo induzido. A prova consiste em usar algumas das propriedades de bicliques maximais apresentadas no Capítulo 6 que nos permitem inferir uma restrição estrutural em seu grafo biclique.

O próximo lema enuncia uma propriedade entre duas bicliques maximais quaisquer de um modelo bipartido de intervalos.

Lema 27. *Sejam o modelo bipartido de intervalos M e $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_M$.*

Se $\alpha_s^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$, então $\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2)$.

Prova. Considere o intervalo $d \in b_1$ tal que $s_d = \alpha_s^+(b_1)$.

Assuma que $d \in b_2$. Pela definição de $\alpha_s^+(b_2)$, temos que $\alpha_s^+(b_2) \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d = \alpha_s^+(b_1)$. Como isso não ocorre, temos que $d \notin b_2$.

Logo, vale que

$$f_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2) \text{ ou } \beta_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} s_d.$$

Pelo Lema 11, temos que

$$\alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2).$$

Portanto, temos que

$$s_d = \alpha_s^+(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_f^-(b_2).$$

Isto é, temos que $\beta_f^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} s_d$ não acontece.

Logo, vale que

$$f_d <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2). \quad (7.1)$$

Pelo Lema 11, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_f^-(b_1).$$

Como $\alpha_f^-(b_1) \leq_{\mathbb{E}(M)} f_d$, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} f_d. \quad (7.2)$$

Por 7.1 e 7.2, temos que

$$\beta_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2).$$

□

Em nosso próximo teorema, apresentamos a restrição que surge como implicação do lema acima e das propriedades apresentadas no Capítulo 6.

Teorema 28. *Sejam um modelo bipartido de intervalos M e as bicliques maximais distintas $b_1, \dots, b_5 \in \mathcal{B}_M$. Seja também a relação \leq definida como a relação \mathcal{R}_M da Definição 28 sobre o modelo M .*

Se $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, então b_5 não pode intersectar, simultaneamente, as bicliques b_1, \dots, b_4 .

Prova. Assuma um intervalo $d \in b_1 \cap b_5$. Suponha, sem perda de generalidade, que $d \in A(M)$.

Como $\alpha_s^+(b_5) \leq_{\mathbb{E}(M)} s_d$ e $s_d \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1)$, temos que

$$\alpha_s^+(b_5) \leq_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_1).$$

Como $b_1 \leq b_2$, temos que $\alpha_s^-(b_1) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2)$. Portanto, vale que

$$\alpha_s^+(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_2).$$

Pelo Lema 27, temos que

$$\beta_s^-(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_2). \quad (7.3)$$

Como $b_2 \leq b_4$, temos que $\beta_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_4)$. Portanto, temos que

$$\beta_s^-(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_4). \quad (7.4)$$

Como $b_2 \leq b_3$, temos que $\beta_s^-(b_2) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_3)$. Temos, por 7.3, que

$$\beta_s^-(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_3).$$

Como $\beta_s^+(b_5) \leq_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^-(b_5)$, temos que

$$\beta_s^+(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \beta_s^+(b_3).$$

Pelo Lema 27, temos que

$$\alpha_s^-(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^-(b_3).$$

Como $b_3 \leq b_4$, temos que $\alpha_s^-(b_3) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_4)$. Portanto, temos que

$$\alpha_s^-(b_5) <_{\mathbb{E}(M)} \alpha_s^+(b_4). \quad (7.5)$$

Por 7.4 e 7.5, temos que $b_5 \leq b_4$, isto é, que b_5 é comparável a b_4 .

Pelo Teorema 24, temos que

$$b_5 \cap b_4 = \emptyset.$$

Portanto, temos que

$$b_1 \cap b_5 \neq \emptyset \implies b_5 \cap b_4 = \emptyset.$$

Logo, temos que b_5 não pode intersectar as bicliques b_1, \dots, b_4 simultaneamente. \square

Por fim, usamos tal restrição para mostrarmos que nenhum dos grafos biclique admite $K_{1,4}$ como subgrafo induzido.

Corolário 29. *Os grafos de intersecção das bicliques maximais de todo modelo bipartido de intervalos M são livres de $K_{1,4}$.*

Prova. Considere as bicliques maximais b_1, \dots, b_5 de M e a ordem \leq definida como a relação \mathcal{R}_M da Definição 28 sobre M .

Sejam b_1, \dots, b_4 as bicliques que não possuem intersecção duas-a-duas. Pelo Teorema 24, as quatro bicliques são comparáveis duas-a-duas. Pelo Teorema 28, a biclique b_5 não pode intersectar as demais quatro simultaneamente, impedindo que ocorra um $K_{1,4}$ como subgrafo induzido no grafo de intersecção das bicliques maximais de M . \square

Como discutido ao final do Capítulo 6, o resultado de Groshaus e Szwarcfiter (2010) implica que o grafo P_3 não é grafo biclique de grafo algum. Como P_3 é um grafo de co-comparabilidade que não possui $K_{1,4}$ como subgrafo induzido, temos que a classe dos grafos biclique dos grafos de bi-intervalos está propriamente contida na classe dos grafos de co-comparabilidade que não admitem $K_{1,4}$ como subgrafo induzido.

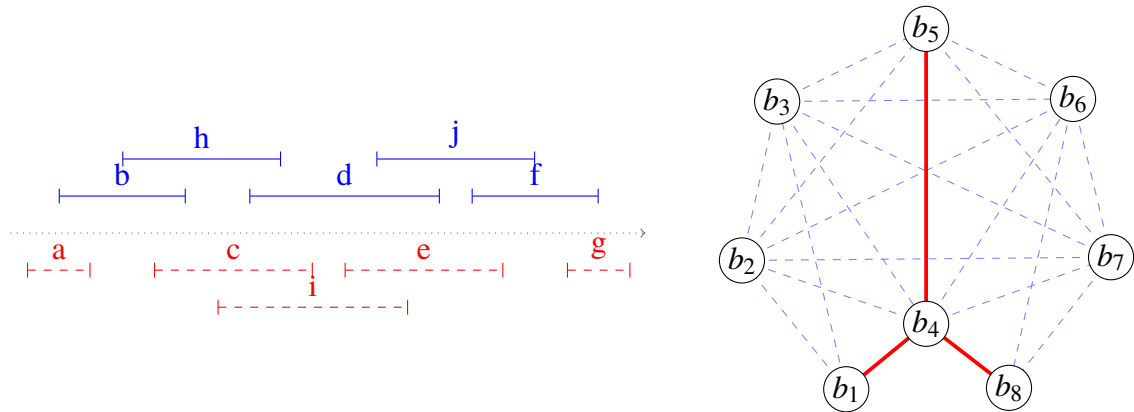


Figura 7.1: Modelo bipartido de intervalos e seu grafo biclique correspondente, o qual contém um $K_{1,3}$ induzido

7.2 Subgrafos Permitidos

Na seção anterior, mostramos que $K_{1,4}$ é proibido de aparecer como subgrafo induzido em qualquer grafo biclique de algum modelo bipartido de intervalos. Naturalmente, podemos nos perguntar se o mesmo se aplica ao $K_{1,3}$. Mostramos, pelo exemplo a seguir, que é possível que o $K_{1,3}$ ocorra como subgrafo induzido.

A Figura 7.1 ilustra, à esquerda, um modelo bipartido de intervalos e, à direita, seu respectivo grafo biclique. O modelo M representado é definido como $A(M) = \{b, h, d, j, f\}$, $B(M) = \{a, c, e, g, i\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_a, s_b, f_a, s_h, s_c, f_b, s_i, s_d, f_h, f_c, s_e, s_j, f_i, f_d, s_f, f_e, f_j, s_g, f_f, f_g)$ e possui as bicliques maximais $b_1 = \{a, b, c\}$, $b_2 = \{b, c, d, h\}$, $b_3 = \{c, d, h, i\}$, $b_4 = \{c, d, e, i\}$, $b_5 = \{d, h, i, j\}$, $b_6 = \{d, e, i, j\}$, $b_7 = \{d, e, f, j\}$ e $b_8 = \{e, f, g\}$. Intervalos de $A(M)$ estão em linhas contínuas e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado. Note que as bicliques b_1, b_4, b_5 e b_8 formam um $K_{1,3}$ induzido no grafo biclique, cujas arestas estão destacadas.

Com o resultado discutido no Capítulo 6, de que grafos biclique de modelos bipartidos de intervalos são de co-comparabilidade, também é natural perguntarmos se a classe também proíbe C_4 como subgrafo induzido, com base na caracterização de grafos de intervalos de Gilmore e Hoffman (1964) de que são grafos de co-comparabilidade que não admitem C_4 como subgrafo induzido. Tal raciocínio se justifica pela ideia intuitiva de que bicliques, por possuírem delimitadores que representam pontos numa reta real, possam ser representadas por intervalos e, portanto, nos leva a ideia de que a classe é composta por grafos de intervalos. Entretanto, o próximo exemplo mostra que alguns dos grafos biclique possuem o C_4 como subgrafo induzido, refutando essa conjectura.

A Figura 7.2 ilustra, à esquerda, um modelo bipartido de intervalos e, à direita, seu respectivo grafo biclique. O modelo M representado é definido como $A(M) = \{b, d, f, h, j\}$, $B(M) = \{a, c, e, g, i\}$ e $\mathbb{E}(M) = (s_a, s_b, s_c, s_d, f_a, f_b, s_e, s_f, f_c, f_d, s_g, s_h, f_e, f_f, s_i, s_j, f_g, f_h, f_i, f_j)$ e possui as bicliques maximais $b_1 = \{a, b, c, d\}$, $b_2 = \{b, c, d, f\}$, $b_3 = \{a, c, d, e\}$, $b_4 = \{c, d, e, f\}$, $b_5 = \{d, e, f, h\}$, $b_6 = \{c, e, f, g\}$, $b_7 = \{e, f, g, h\}$, $b_8 = \{f, g, h, j\}$, $b_9 = \{e, g, h, i\}$ e $b_{10} = \{g, h, i, j\}$. Intervalos de $A(M)$ estão em linhas contínuas e intervalos de $B(M)$ estão em tracejado. Note que as bicliques b_2, b_3, b_9 e b_8 formam um C_4 induzido no grafo biclique, cujas arestas estão destacadas.

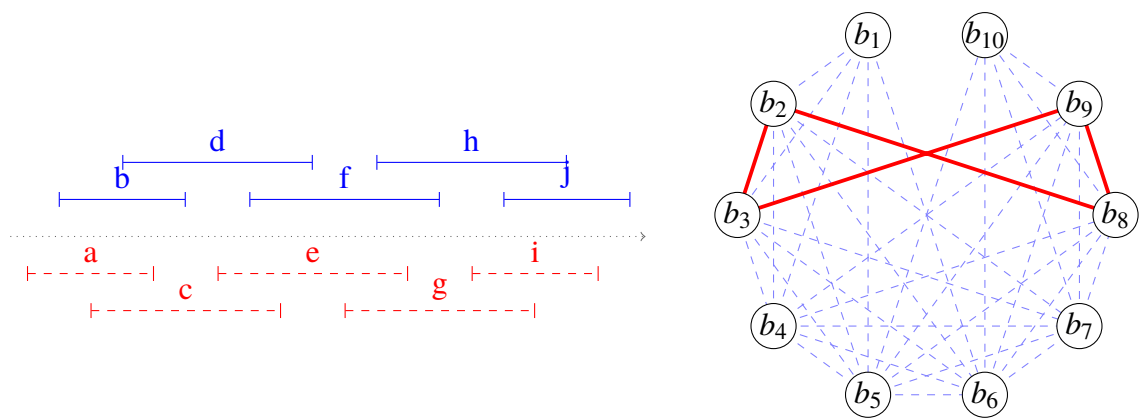


Figura 7.2: Modelo bipartido de intervalos e seu grafo biclique correspondente, o qual contém um C_4 induzido

8 Conclusão

Para nosso projeto de estudos, propomos uma investigação das classes de grafos biclique de grafos de bi-intervalos e grafos bi-arco-circulares a procura de possíveis caracterizações. Apresentamos um algoritmo para listagem de bicliques maximais em grafos de bi-intervalos a partir de um modelo bipartido de intervalos que o representa e uma adaptação para o caso bi-arco-circular. Embora o algoritmo tenha proporcionado melhor entendimento das bicliques em grafos de bi-intervalos, o resultado obtido depende de uma característica exclusiva para os bi-intervalos; a de todo evento de início ocorrer antes de seu respectivo evento de fim na ordem de eventos de intervalos.

Com o maior foco na investigação das bicliques maximais de grafos de bi-intervalos, foi possível descrever uma caracterização de grafos de biclique de grafos de bi-intervalos como uma subclasse de grafos de co-comparabilidade que não admitem um $K_{1,4}$ como subgrafo induzido. A investigação de alguns de tais grafos biclique também nos permitiu descobrir $K_{1,3}$ e C_4 como estruturas que podem ocorrer como subgrafos induzidos, ajudando a melhor compreender como as intersecções de bicliques podem se comportar nos grafos de bi-intervalos e permitindo refutar a conjectura de que seus grafos biclique estariam contidas na classe de grafos de intervalos.

Introduzimos a notação ϕ como ferramenta de análise estrutural de modelos bipartidos de intervalos, a qual usamos para a prova de corretude do algoritmo de listagem de bicliques maximais. Também introduzimos a notação $\alpha\text{-}\beta$ e os conceitos de *centros* e *vãos* de bicliques, que nos permitiram aprofundamento das propriedades das bicliques e nos levaram à caracterização discutida.

8.1 Trabalhos Futuros

Sobre o estudo de listagem de bicliques maximais, o algoritmo apresentado pode servir como base para a investigação de um algoritmo mais eficiente para o caso de bi-intervalos. Enquanto a corretude da adaptação para o caso bi-arco-circular pode ser investigada, a qual possa exigir uma adaptação da notação ϕ capaz de lidar com representações de arcos com eventos de fim que ocorrem antes de seus eventos de início.

Para o estudo de bicliques maximais de grafos de bi-arco-circulares, uma adaptação da notação $\alpha\text{-}\beta$ pode permitir que mais seja desenvolvido sobre suas propriedades estruturais. A adaptação talvez exija o uso de relações ternárias para cobrir casos de intersecções de bicliques em ambos os extremos, contornando a circunferência. De forma análoga, adaptar os conceitos de *centros* e *vãos* para o caso bi-arco-circular pode permitir melhor entendimento das bicliques.

Embora tenhamos encontrado uma caracterização para a classe de grafos biclique de grafos de bi-intervalos, essa caracterização apenas descreve uma superclasse de grafos que a contém e não implica em equivalência. Uma continuação dos estudos de bicliques em bi-intervalos pode permitir relacionar a classe com alguma classe de grafos conhecida.

REFERÊNCIAS

- ALEXE, G. et al. Consensus algorithms for the generation of all maximal bicliques. *Discrete Applied Mathematics*, v. 145, n. 1, p. 11 – 21, 2004. ISSN 0166-218X. Graph Optimization IV. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X04000629>>.
- ATLURI, G. et al. Discovering coherent value bicliques in genetic interaction data. In: *Proceedings of 9th International Workshop on Data Mining in Bioinformatics (BIOKDD'10)*. [S.l.: s.n.], 2010.
- BASU, A. et al. Circular-arc bigraphs and its subclasses. *Journal of Graph Theory*, v. 73, n. 4, p. 361–376, 2013. ISSN 1097-0118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.21681>>.
- BU, D. et al. *Topological structure analysis of the proteinprotein interaction network in budding yeast*. *Nucleic Acids Res.* 2003.
- DAWANDE, M. et al. On bipartite and multipartite clique problems. *Journal of Algorithms*, v. 41, n. 2, p. 388 – 403, 2001. ISSN 0196-6774. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019667740191199X>>.
- DIAS, V. M. F.; FIGUEIREDO, C. M. H. de; SZWARCFITER, J. L. On the generation of bicliques of a graph. v. 155, n. 14, p. 1826–1832, 2007.
- EPPSTEIN, D. Arboricity and bipartite subgraph listing algorithms. *Information processing letters*, Elsevier, v. 51, n. 4, p. 207–211, 1994.
- GASPERS, S.; KRATSCH, D.; LIEDLOFF, M. On independent sets and bicliques in graphs. *Algorithmica*, v. 62, n. 3, p. 637–658, 2012. ISSN 1432-0541. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00453-010-9474-1>>.
- Gilmore, P.; Hoffman, A. A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Can. J. Math.*, Canadian Mathematical Society, Ottawa; Canada University of Toronto Press, Toronto, v. 16, p. 539–548, 1964. ISSN 0008-414X; 1496-4279/e.
- GROSHAUS, M.; SZWARCFITER, J. L. Biclique graphs and biclique matrices. *Journal of Graph Theory*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 63, n. 1, p. 1–16, 2010. ISSN 1097-0118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.20442>>.
- HAEMERS, W. H. Bicliques and eigenvalues. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 82, n. 1, p. 56 – 66, 2001. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895600920203>>.
- HELL, P.; HUANG, J. Interval bigraphs and circular arc graphs. *Journal of Graph Theory*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 46, n. 4, p. 313–327, 2004. ISSN 1097-0118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.20006>>.

KUMAR, R. et al. Trawling the web for emerging cyber-communities. *Computer Networks*, v. 31, n. 11, p. 1481 – 1493, 1999. ISSN 1389-1286. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1389128699000407>>.

LI, J. et al. Maximal biclique subgraphs and closed pattern pairs of the adjacency matrix: A one-to-one correspondence and mining algorithms. *IEEE Trans. on Knowl. and Data Eng.*, IEEE Educational Activities Department, Piscataway, NJ, USA, v. 19, n. 12, p. 1625–1637, dez. 2007. ISSN 1041-4347. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TKDE.2007.1906660>>.

LIU, G.; SIM, K.; LI, J. Efficient mining of large maximal bicliques. In: TJOA, A. M.; TRUJILLO, J. (Ed.). *Data Warehousing and Knowledge Discovery*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 437–448. ISBN 978-3-540-37737-5.

MAKINO, K.; UNO, T. New algorithms for enumerating all maximal cliques. In: SPRINGER. *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*. [S.l.], 2004. p. 260–272.

MÜLLER, H. Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time. *Discrete Applied Mathematics*, v. 78, n. 1, p. 189 – 205, 1997. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X97000279>>.

NAGARAJAN, N.; KINGSFORD, C. Uncovering genomic reassortments among influenza strains by enumerating maximal bicliques. *2012 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine*, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, v. 0, p. 223–230, 2008.

PEETERS, R. The maximum edge biclique problem is np-complete. *Discrete Applied Mathematics*, v. 131, n. 3, p. 651 – 654, 2003. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X03003330>>.

PRISNER, E. Bicliques in graphs i: Bounds on their number. *Combinatorica*, v. 20, n. 1, p. 109–117, 2000. ISSN 1439-6912. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s004930070035>>.

ZHANG, Y. et al. On finding bicliques in bipartite graphs: a novel algorithm and its application to the integration of diverse biological data types. *BMC Bioinformatics*, v. 15, n. 1, p. 110, Apr 2014. ISSN 1471-2105. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/1471-2105-15-110>>.

Apêndice A: Implementação do algoritmo de listagem de bicliques maximais

O programa em Python, versão 3, a seguir implementa o algoritmo de listagem de bicliques maximais apresentado neste documento. Além da etapa de geração da lista de potenciais bicliques descrita pelo Algoritmo 1, o algoritmo também implementa as duas etapas de limpeza da lista, descritas pelos Algoritmos 2 e 3, retornando apenas as bicliques maximais do modelo bipartido de intervalos de entrada.

A.1 Implementação da Listagem de Bicliques

```

1  #!/usr/bin/python3
2
3  def new_pot_biclique():
4      return {-1: [], 1: [], 'lock': {-1: True, 1: True}}
5
6  def insert_into_pot_biclique(b, p, i):
7      if not p in [1,-1]:
8          return
9      if b['lock'][p] and not i in b[p]:
10         b[p] += [i]
11
12 def remove_from_pot_biclique(b, p, i):
13     if not p in [1,-1]:
14         return
15     if i in b[p]:
16         b[p].remove(i)
17
18 def lock_pot_biclique(b, p):
19     if not p in [1,-1]:
20         return
21     b['lock'][p] = False
22
23 def copy_pot_biclique(b):
24     k = new_pot_biclique()
25     k[-1] += b[-1]
26     k[1] += b[1]
27     k['lock'][-1] = b['lock'][-1]
28     k['lock'][1] = b['lock'][1]
29     return k
30
31 # Read input
32
33 inner = input().split(',')
34 E = input().split(',')
35 L = [new_pot_biclique()]
36

```

```

37 # Process events
38
39 for e in E:
40     t = e[0]
41     i = e[1:]
42     p = 1 if i in inner else -1
43     if t == '+':
44         for l in L:
45             if l['lock'][p]:
46                 insert_into_pot_biclique(l, p, i)
47     else:
48         for l in L:
49             if i in l[p]:
50                 k = copy_pot_biclique(l)
51                 remove_from_pot_biclique(k, p, i)
52                 lock_pot_biclique(l, -p)
53                 L += [k]
54
55 # Print output
56
57 def print_biclique(b):
58     print('{'+','.join(b[-1]+b[1])+'}')
59
60 def is_subbiclique(b0, b1):
61     for i in b0[-1]:
62         if not i in b1[-1]:
63             return False
64     for i in b0[1]:
65         if not i in b1[1]:
66             return False
67     return True
68
69 print('Maximal bicliques:')
70
71 B = [True for _ in L]
72 for l in L:
73     for idx,k in enumerate(L):
74         if k != l and is_subbiclique(k, l):
75             B[idx] = False
76 for idx,l in enumerate(L):
77     if B[idx] and l[1] and l[-1]:
78         print_biclique(l)

```

A entrada do programa é composta por duas linhas; a primeira descreve os intervalos de uma das partes do modelo, separados por vírgula, e a segunda descreve a ordem de ocorrência de eventos de início e fim dos intervalos do modelo, com eventos separados por vírgula. Cada intervalo é representado por uma *string* alfanumérica e cada evento é representado por um intervalo com um + (para eventos de início) ou um - (para eventos de fim) prefixado. Intervalos que não ocorrem na primeira linha da entrada são considerados da parte contrária dos que ocorrem.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de entradas para o programa.

A.1.1 Entrada correspondente ao exemplo apresentado na Seção 4.2.1

1	2, 4
2	+2, +1, -1, +3, +4, -3, -2, -4

A.1.2 Entrada para um exemplo que induz um $K_{1,3}$ em seu grafo biclique

1	a, c, i, e, g
2	+a, +b, -a, +h, +c, -b, +i, +d, -h, -c, +e, +j, -i, -d, +f, -e, -j, +g, -f, -g

A.1.3 Entrada para um exemplo que induz um C_4 em seu grafo biclique

1	a, c, e, g, i
2	+a, +b, +c, +d, -a, -b, +e, +f, -c, -d, +g, +h, -e, -f, +i, +j, -g, -h, -i, -j